Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

21.6.2007

9. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Infima der folgenden Funktionale. Sind es sogar Minima?

a) $\inf \int_0^1 \mathrm{d}x\, u(x)^2$ über alle $u \in C(0,1)$ mit $u(0) = u(1) = 1$.

b) $\inf \int_0^1 \mathrm{d}x \left\{ \left((\partial_x u(x))^2 - 1\right)^2 + u(x)^2 \right\}$ über alle $u \in C_0(0,1)$.

c) $\inf \int_0^1 \mathrm{d}x \left\{ (u(x)^2 - 1)^2 + \left(\int_0^1 \mathrm{d}y\, J(x,y)u(y)\right)^2 \right\}$ über alle $u \in C_0(0,1)$, wobei J lokal integrierbar.

Aufgabe 2

a) Es seien H Vektorraum über $\mathbb{K}$, $a : H \times H \to \mathbb{K}$ sesquilinear, hermitesch und $a(v,v) > 0$ für $v \neq 0$. Ferner sei $\ell : H \to \mathbb{K}$ linear. Zeigen Sie, dass $v \in H$ das Funktional $E(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)$ genau dann minimiert, wenn $a(v,u) = \ell(u)$ für alle $u \in H$.

b) Nun sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$, $V \subset H$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge, $a : H \times H \to \mathbb{K}$ sesquilinear, hermitesch, und es gebe $\alpha, C > 0$, so dass $|a(u,v)| \leq C\|u\|_H \|v\|_H$ und $a(v,v) > \alpha \|v\|_H^2$ für alle $u, v \in H$. Man beweise, dass für jedes $\ell \in H'$ genau ein $v \in V$ existiert, welches $E(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)$ über V minimiert.

Hinweis: Numerik 2?

Aufgabe 3

Mit der Notation aus Aufgabe 2 seien $H = V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ für ein offenes, beschränktes und konvexes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und ν der nach außen gerichtete Normalenvektor an $\partial\Omega$. Weiterhin seien

$$a(u,v) \;=\; \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}\, \partial_{x_i} u\, \partial_{x_j} v, \qquad \ell(v) \;=\; \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv,$$

mit $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j > c\|\xi\|^2$ für ein $c > 0$ und $\ell(1) = 0$.

a) Beweisen Sie, dass die durch das Produkt $(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ induzierte Norm $\|u\| = (u,u)^{1/2}$ äquivalent zur Quotientennorm $\|u\|_{H^1/\mathbb{R}} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u + c\|_{H^1}$ auf $H^1/\mathbb{R}$ ist.

b) Es gibt genau ein $v \in H$, das E minimiert.

c) Sind die $a_{ij}\partial_{x_j} v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, so löst v das Randwertproblem

$$-\sum_{i,j} \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u) = f, \quad \sum_{i,j} \nu_i\, a_{ij}\, \partial_{x_j} u|_{\partial\Omega} = g$$

im klassischen Sinn.

Hinweis: Wie in Aufgabe 6.3 ist der Spuroperator $\gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ stetig. Auch der Beweis der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung könnte hilfreich sein.