Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

12.6.2007

# 8. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Sei $\Omega$ eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand. Später werden wir sehen, dass das Dirichletproblem für $\Delta - \lambda \operatorname{Id}$ auf $L^2(\Omega)$,

$$\Delta u - \lambda u = f \in L^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Ausnahme abzählbar vieler reeller Eigenwerte $\lambda_j \to -\infty$ eine eindeutige verallgemeinerte Lösung in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ besitzt.

## Aufgabe 1

a) Sei $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\{x \in \mathbb{R}^n : v(x) = 0 \wedge \partial_{x_j} v(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge, und mit $v$ ist auch $|v|$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$.

*Hinweis:* Was ist $\partial_{x_j} \max\{v(x), 0\}$?

b) Beweisen Sie, dass der größte Eigenwert $\lambda_1$ des Randwertproblems (1) negativ und der zugehörige Eigenraum eindimensional ist. Hat die Eigenfunktion zu $\lambda_1$ Nullstellen in $\Omega$?

*Hinweis:* Benutzen Sie $\lambda_1 = -\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int \|\nabla v(x)\|^2 \mathrm{d}x}{\int |v(x)|^2 \mathrm{d}x}$, wobei das Minimum genau für Eigenfunktionen angenommen wird, sowie das Maximumprinzip.

## Aufgabe 2

Sei $g \in C^2(\mathbb{R})$ mit $g(0) = g'(0) = 0$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen: Ist $\lambda > \lambda_1$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gibt es für alle $f \in L^2(\Omega)$ mit $\|f\|_{L^2} < \varepsilon$ eine in einer Nullumgebung von $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ eindeutige Lösung der Gleichung $\Delta u - \lambda u - g(u) = f$.

b) Finden Sie $\varepsilon > 0$, eine Umgebung $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ von $\lambda_1$ und eine stetig differenzierbare Kurve $V \subset \big(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times \mathcal{I}$ von Lösungen der Gleichung $\Delta u - \lambda u = g(u)$, so dass $(0, \lambda_1) \in V$ und so dass $V$ für $\lambda \in \mathcal{I}$ jede *kleine* Lösung $0 \neq v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mit $\|v\|_{H^2} < \varepsilon$ enthält.