Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

22.5.2007

7. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Es seien $m, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, $n > 3$ und $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Ist $|P(\xi)| = |\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha| > c\|\xi\|^m$ für ein $c > 0$, so definiert

$$P(-i\partial_x)\,u \;=\; \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(-i\partial_x)^\alpha u \;=\; 0$$

mit den Randbedingungen

$$B_j(-i\partial_x)\,u|_{x_n=0} \;=\; \sum_{|\alpha|=m_j} b_\alpha(-i\partial_x)^\alpha u|_{x_n=0} \;=\; f_j \in H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \qquad (j = 1, \dots, k)$$

ein Randwertproblem auf $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ mit *konstanten* Koeffizienten.

a) Fouriertransformieren Sie die $k+1$ Gleichungen in den $x_1, \dots, x_{n-1}$–Richtungen und finden Sie alle Lösungen der transformierten ersten Gleichung in $\mathcal{S}'$.

b) Setzen Sie Ihre allgemeine Lösung in die transformierten Randbedingungen ein. Welche zusätzliche Bedingung garantiert eine eindeutige Lösung? Ein solches Randwertproblem nennen wir *elliptisch*.

c) Ist das Dirichletproblem für den Laplaceoperator elliptisch? Zeigen Sie mit der obigen Methode, dass

$$v(x', x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{d}y' \, \frac{2x_n}{|S^{n-1}|\,(\|x'-y'\|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}}\, f(y')$$

mit $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ in diesem Fall die eindeutige Lösung ist.

Hinweis: Vielleicht hilft $\mathrm{e}^{-\beta} = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{e}^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4s}}$ *für* $\beta \geq 0$.

d) Gibt der Laplaceoperator auch mit Randbedingung $B_1 = \sum_j a_j(-i\partial_{x_j})$ ein elliptisches Problem?

Aufgabe 2

Definieren Sie nun $\tilde{P} : H^m(\mathbb{R}^n_+) \to \mathcal{H}^0$ durch $\tilde{P}u = (Pu, B_1 u, \dots, B_k u)$, wobei

$$\mathcal{H}^s \;=\; H^s(\mathbb{R}^n_+) \times H^{m-m_1+\frac{2s-1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \cdots \times H^{m-m_k+\frac{2s-1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

sei. Im Folgenden konstruieren Sie *näherungsweise* eine Inverse $\tilde{Q}$ zu $\tilde{P}$.

a) Ist $\tilde{P}$ stetig?

b) Identifizieren Sie $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ mit seiner Fortsetzung durch 0 in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und setzen Sie $u_1(\xi', x_n) = \int \mathrm{d}\xi_n\, \mathrm{e}^{ix_n\xi_n}\chi(\xi)\frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{2\pi P(\xi)}$, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(\xi) = 0$ für $\|\xi\| < \frac{1}{2}$ und $= 1$ für $\|\xi\| > 1$. Zeigen Sie $\|u_1\|^2_{H^m} \leq C(\|f\|^2_{L^2} + \|u_1\|^2_{L^2})$ und $Pu_1 = f + Tf$ für ein stetiges $T : L^2(\mathbb{R}^n_+) \to H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

c) Finden Sie $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$ mit $\tilde{P}u = (Pu_1, f_1, \dots, f_k)$. Ist der durch $\tilde{Q}(f, f_1, \dots, f_k) = u$ definierte Operator $\tilde{Q} : \mathcal{H}^0 \to H^m(\mathbb{R}^n_+)$ stetig? Warum ist dies *fast* eine Rechtsinverse des Randwertproblems?

d) Inwiefern ist $\tilde{Q}$ auch *fast* eine Linksinverse?