Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

15.5.2007

# 6. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

### Aufgabe 1

Die Topologie des Vektorraums $X$ sei durch eine abzählbare Familie $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ von Halbnormen definiert. Zeigen Sie, dass die Metrik

$$d(x,y) = \sum_n 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

dieselbe Topologie auf $X$ erzeugt.

### Aufgabe 2

a) Berechnen Sie für positiv definites $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Fouriertransformierte von $\mathrm{e}^{-\langle Ax,x\rangle}$.

b) Für welche $p > 2$, $q > 1$ ergibt die Einschränkung der Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ einen stetigen Operator mit Werten in $L^q(\mathbb{R}^n)$?

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $\gamma f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)$ für $s > \frac{1}{2}$ einen stetigen Operator $\gamma : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ definiert.

### Aufgabe 4

Sei $1 < p < \infty$. Für gegebene $a \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ betrachten wir die durch $\tau_a f(x) = f(x-a)$ und $M_\mu f(x) = \mu(x) f(x)$ definierten Operatoren auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

a) Beweisen Sie, dass jeder stetige lineare Operator $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$ von der Form $T = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\mu_T} \circ \mathcal{F}$ für ein $\mu_T \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

b) Warum ist $\mathcal{F}^{-1} \circ M_\mu \circ \mathcal{F} : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^t(\mathbb{R}^n)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ stetig, falls $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$?