INSTITUT FÜR ANALYSIS
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

8.5.2007

5. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}$.

a) Bestimmen Sie eine Lösung $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ des Dirichletproblems

$$\Delta\, u \;=\; 0, \qquad u|_{\partial\Omega} \;=\; f,$$

für $f \in C(\partial\Omega)$. Nimmt v sein Maximum in Ω an?

b) Zeigen Sie in einer Zeile: Liegt v zusätzlich in $C^1(\overline{\Omega})$, so ist es die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft.

c) Ist die Lösung auch in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eindeutig? Hängt sie stetig von f ab?

d) Beweisen Sie für nicht–negative Lösungen $v \geq 0$ die *Harnack*–Ungleichung

$$\frac{1 - \sqrt{x^2+y^2}}{1 + \sqrt{x^2+y^2}}\, v(0,0) \;\leq\; v(x,y) \;\leq\; \frac{1 + \sqrt{x^2+y^2}}{1 - \sqrt{x^2+y^2}}\, v(0,0) \qquad ((x,y) \in \Omega)\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich Aufgabe 2 für dieses Ω und machen Sie einen Ansatz für v!

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Randwertproblem aus Aufgabe 1 auf einer beliebigen offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Finden Sie hinreichende Bedingungen dafür, dass die Lösung Realteil einer holomorphen Funktion ist.

Aufgabe 3

Es seien $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}$, $f \in C(\partial\Omega)$ und $X = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \,:\, u|_{\partial\Omega} = f\}$. Die *Energie* von $u \in X$ ist gegeben durch

$$E(u) \;=\; \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \;\geq\; 0.$$

Bestimmen Sie alle $u \in X$, die E minimieren.