Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

3.5.2007

# 4. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

## Aufgabe 1

a) Sei $u$ eine Funktion auf dem offenen Intervall $\mathcal{I}$, die außerhalb eines $x_0 \in \mathcal{I}$ stetig differenzierbar mit Ableitung $v \in L^1(\mathcal{I})$ ist. Dann gilt

$$u' = v + (\lim_{x\to x_0+} u(x) - \lim_{x\to x_0-} u(x))\, \delta_{x_0}.$$

b) Was folgt für die Ableitung der *Heaviside*-Funktion $H = \chi_{(0,\infty)}$?

c) Berechnen Sie die $n$–te Ableitung der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$.

## Aufgabe 2

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $X$ existiere eine *randdefinierende Funktion*

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ so dass } X = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\} \text{ und } \rho|_{\partial X} = 0,\ d\rho|_{\partial X} \neq 0.$$

Zeigen Sie $\partial_{x_j}\chi_X = \mathbf{n}_j\, \delta_{\partial X}$, wobei $\mathbf{n}$ der nach innen gerichtete Normalenvektor und $\delta_{\partial X}$ die durch das induzierte Volumenelement $\mathrm{d}S$ gegebene Distribution $u \mapsto \int_{\partial X} u \,\mathrm{d}S$ ist.

## Aufgabe 3

a) Es seien $\mathcal{I}$ ein offenes Intervall und $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ mit $u' = 0$. Zeige: $u$ ist konstant.

b) Wie sieht $u$ aus, wenn $u^{(n)} = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$?

c) Ist $v \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ eine distributionentheoretische Lösung der Gleichung

$$u' + au = f$$

mit $a \in C^\infty(\mathcal{I})$ und $f$ stetig, so ist $v \in C^1(\mathcal{I})$, und die Gleichung ist auch im klassischen Sinn erfüllt.

## Aufgabe 4

Raten Sie eine Fundamentallösung des gewöhnlichen Differentialoperators $a_m\partial_t^m + \cdots + a_1\partial_t + a_0$ mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$!