Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

24.4.2007

3. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis. Jede analytische Funktion $u(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\varphi}$ auf S^1 lässt sich als $u(r,\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^n e^{in\varphi}$ holomorph auf eine Umgebung $\{r \in (a,b), \varphi \in [0,2\pi)\}$ von S^1 fortsetzen.

a) Lösen Sie mit Hilfe eines Reihenansatzes das Anfangswertproblem

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S^1} = f, \ \partial_r u|_{S^1} = g$$

auf einer Umgebung von S^1 für analytische Anfangswerte f und g. (∂_r bezeichne die radiale Richtungsableitung.)

b) Für welche Gebiete $\Omega \subset \mathbb{C}$ gibt es (laut Funktionentheorie) holomorphe Funktionen, die sich auf kein $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ holomorph fortsetzen lassen? Existieren für beliebige $0 < a < 1 < b$ Funktionen f und g, so dass Ihre Lösung des Anfangswertproblems diese Eigenschaft auf $\Omega = \{r \in (a,b), \varphi \in [0,2\pi)\}$ hat?

c) Ist die Lösung eindeutig? Hängt sie stetig von f und g ab?

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad u(0,x) = f(x) \ (x \in \mathbb{R}).$$

a) Zeigen sie, dass es nur dann eine analytische Lösung auf dem Streifen $|t| < R$ geben kann, wenn $|f(x)| < M e^{x^2/2R}$ für ein $M > 0$, und dass

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \partial_x^{2n} f(x).$$

b) Gibt es für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ eine analytische Lösung in einer Umgebung von $x = t = 0$?

Hinweis zu a): Betrachten Sie zuerst die Anfangsbedingungen $u(t,0) = g(t)$, $\partial_x u(t,0) = h(t)$ mit g, h analytisch auf einem endlichen Intervall um 0. Was sind die Eigenschaften der Lösung für $t = 0$?