Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

19.4.2007

2. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Seien $V_1, \ldots, V_k$ punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. $V_1, \ldots, V_k$ heißen *integrierbar*, falls durch jedes $p \in M$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ verläuft, so dass $T_q N = \operatorname{span}\{V_1(q), \ldots, V_k(q)\}$ für alle $q \in N$ in einer Umgebung von p.

Wir setzen $\langle V_1, \ldots, V_k \rangle = \{\sum_j a_j V_j : a_j \in C^\infty(M)\}$ und bezeichnen den Fluss von V_i mit $\Phi_{V_i}(t, p)$.

Aufgabe 1

Sind die folgenden $V_1, \ldots, V_k$ integrierbar? Können Sie die Untermannigfaltigkeiten N aus der Definition global wählen?

a) $M = S^1 \times S^1$ Torus, $V_1 = \partial_\theta + \alpha\, \partial_\varphi$.

b) $M = \mathbb{R}^3$, $V_1 = \partial_x + \frac{2zx}{1+x^2+y^2}\, \partial_z$, $V_2 = \partial_y + \frac{2zy}{1+x^2+y^2}\, \partial_z$.

Hinweis: Wie findet man Tangentialvektoren an den Graph einer Funktion?

Aufgabe 2

Der Kommutator $[V_i, V_j]$ von V_i und V_j ist durch seine Wirkung als Differentialoperator auf Funktionen $f \in C^\infty(M)$ definiert: $[V_i, V_j]\, f = V_i(V_j\, f) - V_j(V_i\, f)$.

a) Verifizieren Sie, dass $[V_i, V_j]$ ein Vektorfeld ist und die Jacobi-Identität

$$[[V_i, V_j], V_l] + [[V_j, V_l], V_i] + [[V_l, V_i], V_j] = 0$$

erfüllt. Wie sieht $[V_i, V_j]$ aus, wenn $V_i = \partial_{x_i}$ die Ableitung in Richtung einer lokalen Koordinate ist?

b) Sei $[V_i, V_j] = 0$. Vertauschen dann auch die Flüsse, $\Phi_{V_i}(s, \Phi_{V_j}(t, p)) = \Phi_{V_j}(t, \Phi_{V_i}(s, p))$?

c) Warum gibt es in einer Umgebung von $p \in M$ lokale Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ mit $V_k = \partial_{x_k}$? Kann man sogar $\langle V_1, \ldots, V_k \rangle = \langle \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_k} \rangle$ fordern?

Aufgabe 3

a) Sei $p \in M$ beliebig und $[V_i, V_j] = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq k$. Finden Sie eine Einbettung ψ einer Nullumgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ in M, so dass $\psi(0) = p$ und $T_q(\psi(U)) = \operatorname{span}\{V_1(q), \ldots, V_k(q)\}$ für alle $q \in \psi(U)$. Insbesondere sind $V_1, \ldots, V_k$ integrierbar.

b) Sei nun $[V_i, V_j] \in \langle V_1, \ldots, V_k \rangle$ für alle $1 \leq i, j \leq k$. Dann sind $V_1, \ldots, V_k$ integrierbar.

c) Gilt in b) auch die Umkehrung?

Hinweis zu b): Induktion! Wählen Sie lokale Koordinaten mit $V_k = \partial_{x_k}$ und finden Sie $Y_1, \ldots, Y_k \in \langle V_1, \ldots, V_k \rangle$ mit $[Y_i, Y_j] \in \langle Y_1, \ldots, Y_{k-1} \rangle$, $1 \leq i, j \leq k$. Kommt man sogar auf den Fall aus Teil a) zurück?