Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

3.7.2007

11. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit glattem Rand. Setze $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$. Seien $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$, $\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j > \alpha\|\xi\|^2$ für ein $\alpha > 0$ und $c \geq 0$. Ist $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ und

$$\partial_t u - \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} u + \sum_i b_i \partial_{x_i} u + cu = 0,$$

so gilt das schwache Maximumprinzip $\max_{\overline{\Omega}_T} |u| = \max_{\overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T} |u|$.

Aufgabe 2

Seien $\mathcal{L}, \varepsilon, q, h > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit glattem Rand sowie $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$. Die Konzentration u eines brennenden Materials und die herrschende Temperatur v sind in gewissen Einheiten durch

$$\partial_t u = \mathcal{L}\Delta u - \varepsilon u \mathrm{e}^{-h/v}, \qquad \partial_t v = \Delta v + qu\mathrm{e}^{-h/v}$$

gekoppelt. Als Randbedingungen sind für $t > 0$ $v(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 1$ sowie die Normalenableitung $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0$ vorgegeben. Die Anfangsbedingungen seien durch nichtnegative u_0, v_0 gegeben, mit $u_0 = 1$ nahe $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass die Lösungen des Systems in $\left(C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)\right)^2$ nichtnegativ bleiben.

Aufgabe 3

a) Seien $\Omega = (0,\infty) \times (S^1)^n$ und u eine positive Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_{\phi_1}^2 u - \cdots - \partial_{\phi_n}^2 u = 0.$$

Dann gilt mit $\nabla u = (\partial_{\phi_1} u, \ldots, \partial_{\phi_n} u)$ die Ungleichung

$$\frac{\|\nabla u\|^2}{u^2} - \frac{\partial_t u}{u} \leq \frac{n}{2t}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie $\partial_t f - \Delta f$ für $f_1 = \log u$ und $f_2 = t\|\nabla \log u\|^2 - t\partial_t \log u$.

b) Zeigen Sie für $s > t$ mit Hilfe von a) die Harnack-Ungleichung

$$\frac{u(t,\phi)}{u(s,\psi)} \leq \left(\frac{s}{t}\right)^{n/2} \exp\left(\frac{\|\psi - \phi\|}{4(s-t)}\right).$$

Hinweis: Schätzen Sie $f_1(t,\phi) - f_1(s,\psi) = \int_0^1 \frac{df_1(\eta)}{d\tau}\,\mathrm{d}\tau$, $\eta(\tau) = (s,\psi) + \tau((t,\phi) - (s,\psi))$, ab.