Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

26.6.2007

10. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Dirichletrandbedingungen

$$u_t - \Delta u \ = \ 0, \quad u(t,x) = 0 \ \text{für } x \in \partial\Omega, \quad u(0,x) = u_0(x) \ \text{für } x \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass jede C^2–Lösung

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 = 0$$

und $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \ \leq \ M\, \mathrm{e}^{-ct}$ für gewisse $M, c > 0$ erfüllt.

Hinweis: Gleichungen kann man mit Funktionen multiplizieren und integrieren.

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Die Matrixelemente des symmetrisierten Gradienten $\varepsilon_{ij}(u_1, u_2, u_3)$ seien gegeben durch $\frac{1}{2}(\partial_{x_i} u_j + \partial_{x_j} u_i)$.

a) Es gilt die *Kornsche Ungleichung*

$$\|\nabla u\|_{L^2} \ \leq \ \sqrt{2}\, \|\varepsilon(u)\|_{L^2} \quad \text{für alle } u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3.$$

b) Seien $\mu, \lambda > 0$. Dann strebt die L^2–Norm $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ jeder C^2–Lösung der Evolutionsgleichung

$$\partial_t u - 2\mu\, \nabla \cdot \varepsilon(u) - \lambda\, \nabla(\nabla \cdot u) \ = \ 0, \quad u(t,x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega, \quad u(0,x) = u_0(x) \text{ für } x \in \Omega,$$

für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0.

Aufgabe 3

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p > 1 + \frac{4}{n}$. Betrachten Sie die *nichtlineare Schrödingergleichung*

$$i\, \partial_t u \ = \ \Delta u + |u|^{p-1} u, \quad u(0,\cdot) = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, wobei $u = u_1 + i u_2$ $\mathbb{C}$-wertig ist. Man kann zeigen, dass für kleine t eine hinreichend glatte und für $\|x\| \to \infty$ schnell fallende Lösung v existiert. Beweisen Sie:

a) $\|v\|_{L^2}$ und $E := \int \|\nabla v\|^2 - \frac{2}{p+1} \int |v|^{p+1}$ hängen nicht von t ab.

b) $\partial_t \int \|x\|^2 |v|^2 = -4 \,\mathrm{Im} \sum_j \int x_j \bar{v}\, \partial_{x_j} v =: -4I(t)$.

c) $\partial_t \left(\mathrm{Im} \sum_j \int x_j \bar{v}\, \partial_{x_j} v \right) = -2 \int \|\nabla v\|^2 + n\, \frac{p-1}{p+1} \int |v|^{p+1}$.

d) Sind $E \leq 0$ und $I(0) > 0$, so existiert obige Lösung nur bis zu einem endlichen $t_0 > 0$.

Hinweis zu d): Indirekt. Zeigen Sie $I' \geq cI^2$ für ein $c > 0$. Folgern Sie, dass I, $\|\nabla v\|_{L^2}$ sowie $\|v\|_\infty$ in endlicher Zeit nach ∞ streben.