

## 1. Übungsblatt zu Partiellen Differentialgleichungen

### Aufgabe 1

Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(t) - 2u''(t)u(t) = -1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

auf dem Intervall  $[0, T]$ ,  $T > 0$ . Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung  $v \in C^2(0, T)$  existiert, welche

$$\max_{0 \leq t \leq T} v(t) = v(T)$$

erfüllt.

### Aufgabe 2

Finden Sie die Integralkurven der folgenden Vektorfelder:

$$\text{a) } V_1(x, y) = y\partial_x + 4\partial_y, \quad \text{b) } V_2(x, y) = (x^2 + x)\partial_y - (xy + y)\partial_x.$$

Lösen Sie damit, wenn möglich, die Differentialgleichungen

$$V_1 u = x - \frac{1}{8}y^2, \quad u(x, 0) = 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

und

$$V_2 u = (x^2 + y^2)^2, \quad u|_S = f,$$

für eine Hyperfläche  $S$  durch  $(0, 0)$  und  $f \in C^1(S)$ .

### Aufgabe 3

Geschwindigkeit  $u$ , Dichte  $\rho$  und Energiedichte  $e$  einer eindimensionalen kompressiblen Flüssigkeit sind bei konstantem Druck  $p$  durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u &= 0 \\ \partial_x(\rho u) + \partial_t \rho &= 0 \\ \partial_x(e u) + \partial_t e + p \partial_x u &= 0 \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen  $u(0, x) = u_0(x)$ ,  $\rho(0, x) = \rho_0(x)$  und  $e(0, x) = e_0(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) gekoppelt. Hat man die Geschwindigkeitsverteilung  $u(t, x)$  mit Hilfe der ersten Gleichung auf  $[0, \infty)_t \times \mathbb{R}_x$  gefunden, so erhält man

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \frac{\rho_0(x - u(t, x)t)}{1 + u_0'(x - u(t, x)t)t} \\ e(t, x) &= \frac{e_0(x - u(t, x)t) + p}{1 + u_0'(x - u(t, x)t)t} - p. \end{aligned}$$

Nehmen Sie an, dass  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  monoton wächst und  $u'_0$  kompakten Träger  $\overline{\{x \in \mathbb{R} : u'_0(x) \neq 0\}}$  hat.

- a) Gibt es eine  $C^1$ -Lösung der ersten Gleichung für  $u(t, x)$  auf  $[0, \infty)_t \times \mathbb{R}_x$ ?
- b) Bleibt  $\partial_x u(t, \cdot)$  für  $t > 0$  positiv mit kompaktem Träger? Warum ist  $t \mapsto \int dx (\partial_x u(t, x))^2$  monoton?
- c) Was passiert, wenn  $u_0$  nicht monoton wächst?

*Hinweis:* Organisatorisches und Übungsblätter zur Vorlesung finden Sie unter:

**[www.analysis.uni-hannover.de/~gimperlein/pde07/pde07.html](http://www.analysis.uni-hannover.de/~gimperlein/pde07/pde07.html)**