Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

10.12.2007

9. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 17.12. oder bis 18.12., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 20 *(a) 6 Punkte, b) 5 Zusatzpunkte, c) 4 Punkte)*

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $|f(x)|, |\partial_x f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{1+\varepsilon}}$ für gewisse $\varepsilon, M > 0$. Wir setzen $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x)e^{-i\xi x}$.

a) Zeigen Sie $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n) \in C^1_{2\pi}$. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{F}(n)$ von F bezüglich $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ und beweisen Sie damit die *Poissonsche Summenformel*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\ \mathcal{F}f(n).$$

b) Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung für 2π–periodische Funktionen erhält man durch „Aufwickeln“ des bekannten nichtperiodischen Resultats:

$$G(x, y, t) = \chi_{[0,\infty)}(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - y - 2\pi n)^2}{4t}\right).$$

Beweisen Sie $G(x, y, t) = \chi_{[0,\infty)}(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\lambda_n t}\, \psi_n(x)\, \overline{\psi_n(y)}$, wobei $\psi_n \in C^2_{2\pi}$ auf $\int_0^{2\pi} \psi_n \overline{\psi_m} = \delta_{nm}$ normierte Eigenfunktionen von $-\partial_x^2$ zu Eigenwerten λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, sind. D.h. es gilt $-\partial_x^2 \psi_n = \lambda_n \psi_n$.

Indem man a) auf die Funktionen $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ anwendet, erhält man $2\pi f(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi\ \mathcal{F}f(\xi)$ für $\lambda \to \infty$ (falls $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$). Ersetzt man f durch $(\tau_y f)(x) = f(x + y)$, so ergibt sich die im folgenden nützliche *Umkehrformel für die Fouriertransformation* $2\pi f(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi\ e^{iy\xi}\ \mathcal{F}f(\xi)$.

c) Zusätzlich sei $\mathcal{F}f(\xi) = 0$ für alle $|\xi| > c$. Zeigen Sie $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\frac{n\pi}{c})\ \frac{\sin(cx-n\pi)}{cx-n\pi}$, indem Sie die Summenformel für ein geeignetes $\lambda > 0$ auf $\mathcal{F}f_\lambda$, $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, anwenden. Sie können also f aus Messwerten bei den Vielfachen von $\frac{\pi}{c}$ rekonstruieren. Das kleinstmögliche $\frac{c}{\pi}$ wird auch *Nyquistfrequenz* genannt. Was hat dieses *Abtasttheorem von Shannon* mit der Größe Ihres iPods zu tun?

Aufgabe 21 *(a) 4 Punkte, b) 4 Punkte, c) 2 Punkte)*

a) Schreiben Sie die Gruppe der orthogonalen 2×2–Matrizen,

$$O(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : XX^T = E_2 \right\},$$

als Nullstellenmenge einer Funktion $f : M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit Rang $\partial f = 3$ auf $O(2)$. Ist $O(2)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$? Gilt das auch für die Teilmenge $SO(2) = \{X \in O(2) : \det X = 1\}$?

b) Sei $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. N bezeichne den Nordpol $(0, 0, 1) \in S^2$, S den Südpol $(0, 0, -1) \in S^2$. Zeigen Sie, dass die *stereographischen Projektionen* $f_N : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$ und $f_S : S^2 \setminus S \to \mathbb{R}^2$,

$$f_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3 - 1}, \frac{x_2}{x_3 - 1}\right), \quad f_S(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3 + 1}, \frac{x_2}{x_3 + 1}\right),$$

Homöomorphismen mit Rang $\partial f_N^{-1} =$ Rang $\partial f_S^{-1} = 2$ sind. (Die Inversen kann man explizit ausrechnen!).

c) Sei $I = (0, 2\pi)$ und $\gamma : I \to \gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (\sin(2t) \cos(t), \sin(2t) \sin(t))$. Ist γ ein Homöomorphismus?