Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein 3.12.2007

8. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 10.12. oder bis 13.12., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 17 *(a) 5 Punkte, b) 2 Punkte)*

a) Nach 15a) ist die Fourierreihe von $f \in L^2_{2\pi}$, $f(x) = \pi - x = -f(-x)$ für $x \in (0,\pi)$ und $= 0$ in $x \in \{0,\pi\}$, durch $\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{-i}{n} e^{inx}$ gegeben. Berechnen Sie damit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

b) Betrachten Sie eine lineare Kette aus Edelgasatomen im Abstand R. Die Wechselwirkung zweier um r voneinander entfernter Atome kann durch das Lennard-Jones-Potential $V(r) = 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6\right)$ angenähert werden ($\varepsilon, \sigma > 0$). Meist wird $n = 12$ verwendet, um Rechenarbeit zu sparen, wählen wir aber $n = 8$. Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie $E(R) = \sum_{j\neq 0} V(jR)$ eines Atoms mit der übrigen Kette und bestimmen Sie im Gleichgewicht $\partial_R E(R) = 0$ den Abstand R als Funktion von ε und σ.

Aufgabe 18 *(a) 3 Punkte, b) 5 Punkte)*

Für $f \in L^2_{2\pi}$ bezeichne $\hat{f}(n)$ den n–ten Fourierkoeffizienten bezüglich $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$.

a) Ist $f \in C^k_{2\pi}$, so ist $\sum_n n^{2k}|\hat{f}(n)|^2 < \infty$.

b) Gilt $\sum_n n^{2k+\alpha}|c_n|^2 < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $\alpha > 1$, so sind die c_n die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in C^k_{2\pi}$.

Hinweis: Verwenden Sie das Weierstrasssche Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 19 *(a) 2 Punkte, b) 3 Punkte)*

Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass sich viele physikalische Systeme in geeigneten Koordinaten $I_1(t), \dots, I_n(t)$ auf eine periodische Zeitentwicklung $I_j(t) = e^{i\varphi_j(t)}$, $\varphi_j(t) = \varphi_{j,0} + \omega_j t$ für $t, \varphi_{j,0}, \omega_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, zurückführen lassen (Wirkungs- und Winkelvariablen, siehe z.B. Goldstein).
Sei $C_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ stetig } : f(x_1 + 2\pi k_1, \dots, x_n + 2\pi k_n) = f(x_1, \dots, x_n)\ \forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$ der Vektorraum der in allen n Variablen 2π–periodischen stetigen Funktionen. Für eine zu messende Größe $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ ist es praktisch oft einfacher, den *zeitlichen Mittelwert* (falls er existiert)

$$\langle f(\varphi_0)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t)$$

als den *räumlichen Mittelwert* $\bar{f} = (2\pi)^{-n}\int_{[0,2\pi]^n} \mathrm{d}x\ f(x)$ zu bestimmen.

a) Zeigen Sie: Sind $\omega_1, \dots, \omega_n$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ (d.h. sind $q_j \in \mathbb{Q}$ mit $q_1\omega_1 + \cdots + q_n\omega_n = 0$, dann sind alle $q_j = 0$), und $f(x_1, \dots, x_n) = e^{ik_1x_1+\cdots+ik_nx_n}$ für gewisse $k_j \in \mathbb{Z}$, so existiert $\langle f(\varphi_0)\rangle$ für alle $\varphi_{j,0} \in \mathbb{R}$ und stimmt mit $\bar{f}$ überein.

b) Wie im Beweis des Hauptsatzes 5.16 kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ und $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ eine endliche Linearkombination g von Funktionen aus $B = \{e^{ik_1x_1+\cdots+ik_nx_n} : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$ finden, so dass $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Zeigen Sie damit $\langle f(\varphi_0)\rangle = \bar{f}$ für alle $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\varphi_{j,0} \in \mathbb{R}$, falls $\omega_1, \dots, \omega_n$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind.

Bemerkung: Ein System mit $\langle f(\varphi_0)\rangle = \bar{f}$ für alle $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ nennt man auch *ergodisch*.