Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

26.11.2007

7. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 3.12. oder bis 4.12., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 14 *(a) 1 Punkt, b) 1 Punkt, c) 2 Punkte, d) 3 Punkte)*

a) Gibt es eine Funktion $f \in L^2([0,2\pi])$ mit $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ e^{ik^3x} = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$?

b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei eine Folge stetiger Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ für ein $f \in L^2([0,1])$. Ist f stetig?

c) Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Beweisen Sie für $x, y \in H$ die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, indem Sie das Minimum von $\Delta(\lambda) = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ bestimmen.

d) BMW möchte im Labor den Zusammenhang von Bremsweg x und Anfangsgeschwindigkeit v bei seinem neuen Modell herausfinden. Die Techniker benutzen den Ansatz $x = a_nv^n+a_{n-1}v^{n-1}+\dots+a_1v+a_0$. Zur Bestimmung der Parameter $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ werden $m > n$ Messungen mit Ergebnissen $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ bei Geschwindigkeiten $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ durchgeführt. a soll so gewählt werden, dass sowohl der quadratische Fehler $\sum_j (x_j - a_nv_j^n - a_{n-1}v_j^{n-1} - \dots - a_1v_j - a_0)^2 = \|x - Va\|_2^2$, $V = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & v_m & \cdots & v_m^n \end{pmatrix}$, als auch $\|a\|_2$ so klein wie möglich sind. Zeigen Sie, dass a die eindeutige Lösung von $V^TVa = V^Tx$ mit $a \in (\text{Kern } V)^\perp$ ist.

Aufgabe 15 *(a) 2 Punkte, b) 4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Koeffizienten c_n der Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ von $f \in L^2([0,2\pi])$, $f(x) = \pi - x$.

b) Der Fehler bei Approximation durch die N–te Partialsumme der Reihe ist $g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} - (\pi - x)$. Zeigen Sie $\partial_x g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$. x_N bezeichne den kleinsten kritischen Punkt > 0 von g_N. Verifizieren Sie $g_N(x_N) = \int_0^{x_N} \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \mathrm{d}x - \pi$ und $\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} g_N(x) > 0$. Skizzieren Sie, was hier passiert. Dieses Phänomen tritt immer an den Sprungstellen der von $[0,2\pi]$ auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzten Funktion auf.

Aufgabe 16 *(a) 4 Punkte, b) 3 Punkte, c) 4 Zusatzpunkte)*

a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die *Legendre–Polynome* P_n durch $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \partial_x^n [(x^2 - 1)^n]$. Beweisen Sie, dass $\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine orthogonale Teilmenge von $L^2([-1,1])$ bildet und dass $\|P_n\|_2^2 = \frac{2}{2n+1}$.

b) Seien $x_{1,n}, \dots, x_{k,n} \in (-1,1)$ die Punkte, an denen P_n sein Vorzeichen wechselt. Überlegen Sie mit Hilfe von $Q_n(x) = \Pi_j(x - x_{j.n})$, dass P_n genau n verschiedene Nullstellen in $(-1,1)$ hat.

c) Zeigen Sie $(1 - x^2)\partial_x^2 P_n(x) - 2x\partial_x P_n(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0$.

Bemerkung: Diese und ähnliche *Orthogonalpolynome* tauchen z.B. in den Multipolentwicklungen der Elektrostatik (Potential der Ladung q in $(a,0,0)$: $\phi(r,\varphi,\vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos(\vartheta)}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_n P_n(\cos(\vartheta)) \frac{a^n}{r^n}$ für $r > a$) und vor allem in der Quantenmechanik auf (Wasserstoffatom, harmonischer Oszillator, …).