Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

19.11.2007

6. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 26.11. oder bis 27.11., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 14 *(a) 4 Zusatzpunkte, b) 4 Punkte, c) 3 Punkte, d) 8 Punkte)*

a) Die sogenannten Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sind durch folgende Transformation gegeben:

$$T(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi_1) \\ r\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \vdots \\ r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{k-1})\cos(\varphi_k) \\ \vdots \\ r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-1}) \\ r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\sin(\varphi_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

T ist ein C^1–Diffeomorphismus von $(0,\infty)\times(0,\pi)^{n-2}\times(0,2\pi)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} \geq 0,\ x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Jacobi–Determinante $r^{n-1}\sin(\varphi_1)^{n-2}\sin(\varphi_2)^{n-3}\cdots\sin(\varphi_{n-2})$ ist.

b) Für $n \geq 3$ sei $\lambda_n = \inf_{0\neq u\in X} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|^2_{\frac{2n}{n-2}}}$, wobei X für den Unterraum der $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$–Funktionen u steht, für die es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\|x\|^{(n+\varepsilon-2)/2}u(x)$, $\|x\|^{(n+\varepsilon)/2}\|\nabla u(x)\| \to 0$ für $\|x\| \to \infty$. Man kann zeigen, dass das Infimum von einer positiven rotationssymmetrischen Funktion $u_{\min} \in X$ angenommen wird. Setzen Sie $z = \ln(\|x\|)$ und $\Phi(z) = \|x\|^{(n-2)/2}\,u(\|x\|)$ für rotationssymmetrische $u = u(\|x\|)$ und zeigen Sie $\lambda_n = \pi\left(\frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right)^{2/n} \min_{0\neq\Phi\in Y} F(\Phi)$ für $F(\Phi) = \frac{\|\partial_z\Phi\|_2^2 + \frac{(n-2)^2}{4}\|\Phi\|_2^2}{\|\Phi\|^2_{\frac{2n}{n-2}}}$. Y bezeichnet den Vektorraum aller Funktionen, die man aus den rotationsinvarianten Funktionen in X durch obige Transformationen erhält.

c) Versieht man Y mit der Norm $\|\Phi\|_{\overline{Y}} = \|\Phi\|_2 + \|\partial_z\Phi\|_2 + \|\Phi\|_{\frac{2n}{n-2}}$, so ist Y nicht vollständig. Mit $\overline{Y}$ bezeichnen wir den Banachraum aller Funktionen, die man als Grenzwert von Cauchyfolgen in Y bezüglich $\|\cdot\|_{\overline{Y}}$ erhält. Zeigen Sie $\min_{0\neq\Phi\in Y} F(\Phi) = \min_{0\neq\Phi\in\overline{Y}} F(\Phi)$.

d) $F : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ ist in einer Umgebung des Minimums differenzierbar. Das Minimum wird von den Lösungen $\Phi_{\min} \in \overline{Y}$ der Euler–Lagrange–Gleichung $D_\Phi F(\Phi_{\min}) = 0$ (für alle $\Phi \in Y$) angenommen. Zeigen Sie, dass $\Phi_{\min} \in Y$ diese Gleichung genau dann löst, wenn $-\partial_z^2\Phi_{\min} + \frac{(n-2)^2}{4}\Phi_{\min} - \lambda\Phi_{\min}^\alpha = 0$ für gewisse (von Ihnen zu bestimmende) $\lambda,\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Finden Sie ein $\Phi_{\min} \in Y$, das zugehörige $u_{\min} \in X$ sowie λ_n.

Hinweis: Beweisen Sie nur die Aussagen, für die es die Aufgabenstellung ausdrücklich verlangt! Wenn sich die DGL hartnäckig wehrt, schauen Sie nach, was z.B. H. Schulz, *Physik mit Bleistift*, Harry Deutsch, oder Ihre RdP–Mitschrift alles zum Lösen von Bewegungsgleichungen sagen.

Aufgabe 15 *(a) 5 Punkte, b) 5 Zusatzpunkte)*

a) f sei auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f, \partial_x f \in L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$ existiert und $= 0$ ist. Gilt dies auch, wenn Sie nur $f \in L^2(\mathbb{R})$ voraussetzen?

Hinweis: Verwenden Sie z.B. $(f + \partial_x f)^2 \geq 0$ und den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung.

b) Konstruieren Sie mit Hilfe von $(0,1) \ni r \mapsto \log\log\frac{2}{r}$ eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass zwar $f, \|\nabla f\| \in L^2(\mathbb{R}^2)$, aber die Folge $\{f(n,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ divergiert.