Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

5.11.2007

4. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 12.11. oder bis 13.11., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 9 *(a) 6 Punkte), b) 6 Punkte)*

a) Zum Zeitpunkt 0 herrscht im Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Temperatur $f(x)$, f stetig und beschränkt. Für spätere Zeiten $t > 0$ ist die Temperatur laut RdP durch $T : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)$, gegeben. Beweisen Sie, dass $T(t,x)$ zweimal stetig differenzierbar ist und tatsächlich die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t T = \partial_x^2 T$ mit Anfangsbedingung $\lim_{t\to 0^+} T(t,x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Gilt auch $\lim_{t\to 0^-} T(t,x) = f(x)$, falls man $\sqrt{t}$ geeignet definiert?

Hinweis: Z.B. mit dem Satz von der dominierten Konvergenz sowie $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ aus RdP.

b) Ein Stern S ruht im Weltall $\mathbb{R}^3$ und zieht mit seinem Gravitationspotential $V(x) = -\int_S \mathrm{d}y\, \frac{\varrho(y)}{\|x-y\|}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus S$, umherfliegende Astronauten an. Natürlich ist S kompakt und die Dichte $\varrho : S \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass V auf $\mathbb{R}^3 \setminus S$ zweimal stetig differenzierbar ist, dort $\Delta V = 0$ erfüllt und $\lim_{r\to\infty} rV(re) = -\int_S \mathrm{d}y\, \varrho(y)$ für beliebiges $e \in \mathbb{R}^3$ mit $\|e\| = 1$ gilt. Weit weg von S unterscheidet sich $V(x)$ also kaum noch vom Gravitationspotential $-\frac{M}{\|x\|}$ eines Massenpunktes mit $M = \int_S \mathrm{d}y\, \varrho(y)$.

Aufgabe 10 *(a) 4 Punkte, b) 4 Punkte)*

a) Archimedes sagt: „Wenn in ein rechtstehendes Prisma [d.h. in einen Quader] mit quadratischen Grundflächen ein Zylinder eingeschrieben wird, dessen Grundflächen in den gegenstehenden Quadraten liegen und dessen krumme Oberfläche die 4 übrigen Rechtecke berührt, und durch den Mittelpunkt des Kreises, der Grundfläche des Zylinders ist, und eine Seite des gegenstehenden Quadrats eine Ebene gelegt wird, so wird der Körper, der durch diese Ebene [vom Zylinder] abgeschnitten wird, [dem Volumen nach] 1/6 des ganzen Prismas sein.“ Da Ihnen Autoritätsgläubigkeit schon als Wort viel zu lang ist, überprüfen Sie das bitte mit modernen Methoden.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Fubini und der Substitutionsformel für Riemann-Integrale für $w, z, \Delta > 0$:

$$\int_0^1 \mathrm{d}t\, t^{w-1}(1-t)^{z-1} = 2\Delta^z \int_0^\infty \mathrm{d}p\, \frac{p^{2w-1}}{(p^2+\Delta)^{w+z}} = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)}.$$

Hinweis: Vielleicht hilft eine Substitution vom Typ $s = \frac{at+b}{ct+d}$ für gewisse $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Dieses Integral ist in der Quantenfeldtheorie allgegenwärtig und stand aus historischer Sicht auch ganz am Anfang der Stringtheorie.