INSTITUT FÜR ANALYSIS
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

29.10.2007

3. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 5.11. oder bis 6.11., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so auch das Innere B° und der Abschluss $\overline{B}$ von B und $m(B) = m(B^\circ) = m(\overline{B})$.

b) Sind $f, g : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und stimmen auf einer dichten Teilmenge überein, so ist $\int_I f = \int_I g$.

c) Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = n$ falls $\frac{2n}{4n^2-1} < x \leq \frac{1}{2n-1}$ und $f(x) = -n$ falls $\frac{1}{2n+1} < x \leq \frac{2n}{4n^2-1}$ $(n \in \mathbb{N}_{>0})$. Dann ist $(0,1] = \bigcup_{n=1}^\infty (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}]$, aber $\int_0^1 f \neq \sum_{n=1}^\infty \int_{1/(2n+1)}^{1/(2n-1)} f$.

d) $\frac{\sin(x)}{x}$ ist auf $[0, \infty)$ nicht integrierbar.

e) f ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.

f) Es seien $N \subset [0,1]$ nicht messbar, C Cantors Diskontinuum und $f_1, f_2, f_3 : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_1 = \chi_C$, $f_2 = \chi_N$, $f_3(x) = \sqrt{\tan(\frac{\pi x}{2})}$. Dann sind die Produkte $f_i f_j f_k$, $i, j, k \in \{1,2,3\}$, messbar und über $[0,1]$ integrierbar.

g) Seien $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = n^2 x \, e^{-nx}$. Dann ist $\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = 1$.

Aufgabe 7 *(6 Punkte)*

Ähnlich wie bei der Konstruktion des Cantorschen Diskontinuums werden aus dem gleichseitigen, abgeschlossenen Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ nacheinander kleinere, offene und gleichseitige Teildreiecke aus der Mitte der verbleibenden Dreiecke herausgenommen: Wie auf der Rückseite angedeutet, zuerst das mittige $D_{1,1}$, dann $D_{2,1}, D_{2,2}, D_{2,3}$, dann $D_{3,1}, \ldots, D_{3,9}$, usw. Die Restmenge $S = D \setminus \bigcup_{j,k} D_{j,k}$ heißt *Sierpinski-Dreieck*. Nun sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = 2x + j$ falls $(x,y) \in D_{j,k}$ und 0 falls $(x,y) \in S$. Beweisen Sie, dass f integrierbar ist, und bestimmen Sie $\int_D \mathrm{d}m\, f$.

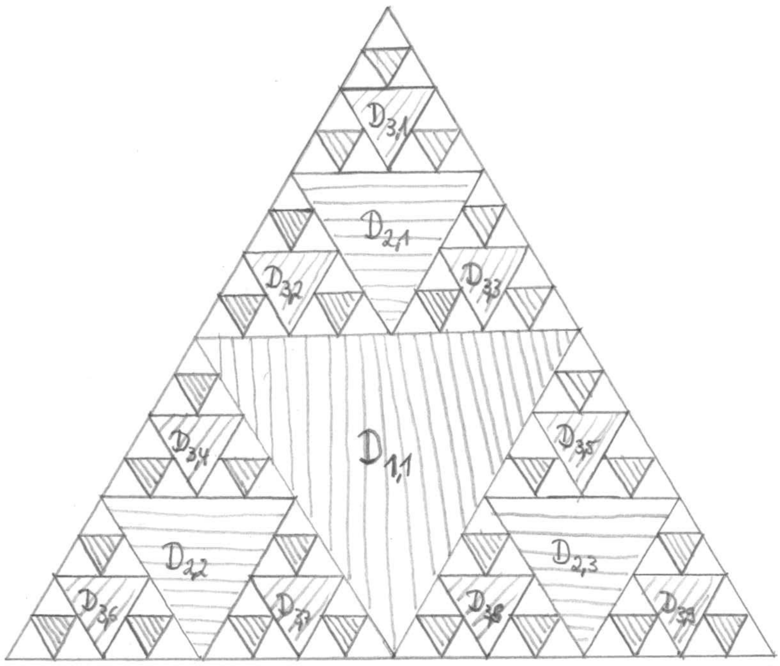
Aufgabe 8 *(4 Punkte)*

Seit der Planckschen Strahlungsformel wissen Sie, dass im thermischen Gleichgewicht die Photonen oder anderen absorbierbaren Bosonen mit Energien E zwischen E_1 und E_2 zusammen die Energie

$$\int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}E \, g(E) \, \frac{E}{e^{\frac{E}{T}} - 1}$$

enthalten. Dabei bezeichnet $g(E)$ die Zustandsdichte, mit der die Energieniveaus verteilt sind und für die in n Dimensionen in der Regel $g(E) = E^{s-1}$ für $s = \frac{n}{2}$ oder n gilt. Man beweise, dass sich in diesem Fall die gesamte Energie der Bosonen mit $E > 0$ zu $T^{s+1}\Gamma(s+1)\zeta(s+1)$ ergibt, wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t \, e^{-t} t^{x-1}$ $(x > 0)$ die Gammafunktion und $\zeta(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^x}$ $(x > 1)$ die Riemannsche Zetafunktion sind.

Hinweis: Wie bekommt man den Nenner los?


D3,1
D2,1
D3,2
D3,3
D1,1
D3,4
D3,5
D2,2
D2,3
D3,6
D3,7
D3,8
D3,9