Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

22.10.2007

2. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 29.10. oder bis 30.10., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f : X \to X$ eine maßerhaltende Abbildung, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ und $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Man zeige, dass dann μ–fast jeder Punkt in A unter Anwendung von f unendlich oft nach A zurückkehrt, d.h. mit $f^1 = f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}_{>1})$ gilt $\mu(\{x \in A : \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : f^n(x) \notin A\}) = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} f^{-k}(A)$, wobei wir $f^0(A) = A$ und $f^{-k}(A) = f^{-1}(f^{-k+1}(A))$ $(k \in \mathbb{N}_{>0})$ setzen, und überlegen Sie sich $\mu(A \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Bemerkung: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ der Phasenraum der Koordinaten q_i und Impulse p_i eines endlich ausgedehnten physikalischen Systems mit beschränkten, konservativen und zeitunabhängigen Kräften (genauer: die Teilmenge mit Energie $\leq E$ für ein großes E). μ sei das auf X eingeschränkte n–dimensionale Lebesguemaß, und für f betrachten wir die Abbildung, die $(q_i, p_i) \in X$ die aus den Newtongleichungen berechneten $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i)$ $t > 0$ Zeiteinheiten später zuordnet. Nach dem Satz von Liouville, den Sie in der klassischen Mechanik kennenlernen, ist f maßerhaltend. Wählt man für A eine Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ um den Anfangszustand, so folgt aus der Aufgabe, dass das System für fast alle Anfangsbedingungen noch unendlich oft bis auf ε zu seinem Ausgangszustand zurückkehrt.

Aufgabe 4 *(a) 4 Punkte, b) 2 Punkte)*

a) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $A \subset \mathbb{R}^2$ definiert man das Diracsche Punktmaß $\delta_{x,y}$ durch $\delta_{x,y}(A) = 1$, falls $(x, y) \in A$, und 0 sonst. Sei $\varepsilon > 0$. Überprüfen Sie, ob $\mu_\varepsilon = \varepsilon^2 \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \delta_{\varepsilon i, \varepsilon j}$ ein Maß auf der σ–Algebra aller Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ definiert. Sei $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq R\}$ die Kreisscheibe um 0 mit Radius R. Beweisen Sie $\mu_\varepsilon(B_R) - \pi R^2 = O(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$ ($\mu_\varepsilon(B_R) - \pi R^2 = o(\varepsilon)$ gilt auch, ist aber etwas schwieriger). Zeigen Sie zusätzlich $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R} \mathrm{d}\mu_\varepsilon\, f = \int_{B_R} \mathrm{d}m\, f$, falls f auf B_R stetig ist.

b) Eine dünne Membran sei am Rand des Quadrats $0 \leq x, y \leq L$ fest eingespannt. Ihre Schwingungsmoden $A \sin(k_x x) \sin(k_y y)$ sind durch die Wellenvektoren (k_x, k_y) bestimmt. Welche Werte können k_x und k_y annehmen? Wie verhält sich die Anzahl der (linear unabhängigen) Moden mit $\|(k_x, k_y)\| \leq k$ für $k \to \infty$ (L fest) bzw. für $L \to \infty$ (k fest)?

Aufgabe 5 *(a) 8 Punkte, b) 2 Punkte)*

a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz–stetig, d.h. es gebe ein $L > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so ist auch das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

b) Sei $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ der Graph einer Lipschitz–stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass G messbar ist, und berechnen Sie $\mu(G)$.

Bemerkung: Stetigkeit allein reicht in a) nicht! So gibt es etwa eine stetige Funktion, die Cantors Diskontinuum auf das Intervall $[0, 1]$ aufbläst (siehe z.B. Amann/Escher, Aufgabe 8 zu III.3), sowie die (stetigen) Peano–Kurven, die $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ auf die Einheitskreisscheibe des $\mathbb{R}^2$ abbilden (Aufgabe 8 zu VIII.1). Das Ergebnis von b) dagegen bleibt auch für stetige Funktionen richtig.