INSTITUT FÜR ANALYSIS
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

21.1.2007

13. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Letztes Übungsblatt dieses Semesters: Abgabe in der Übung am 28.1. oder bis 29.1., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 37 *(a) 5 Zusatzpunkte, b) 2 Zusatzpunkte, c) 4 Zusatzpunkte)*

a) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, d.h. es gebe ein $x_0 \in S$, so dass für alle $x \in S$ die Verbindungsstrecke $\{x_0 + t(x - x_0) : t \in [0,1]\}$ zwischen x_0 und x ganz in S enthalten ist. $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \, \mathrm{d}x_i$ sei eine 1–Form auf S mit stetig differenzierbaren Koeffizienten ω_i. Beweisen Sie, dass ω genau dann exakt ist, wenn $\partial_{x_i}\omega_j = \partial_{x_j}\omega_i$ für alle i, j.

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $\omega = \mathrm{d}f$ mit $f(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \mathrm{d}t \; (x_i - x_{0i}) \; \omega_i(x_0 + t(x - x_0))$.

Bemerkung: Für k–Formen liefert (fast) derselbe Beweis das *Lemma von Poincaré*: $\mathrm{d}\omega = 0 \iff \omega = \mathrm{d}f$.

b) Sei $F = (F_1, \ldots, F_n) : S \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Folgern Sie aus a), dass F genau dann ein Potential $V \in C^2(S)$ mit $F = \nabla V$ besitzt, wenn $\partial_{x_i}F_j = \partial_{x_j}F_i$ für alle i, j.

Bemerkung: In drei Dimensionen ist dies gerade die Bedingung $\nabla \times F = 0$.

c) Die 1–Form $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \, \mathrm{d}x_i$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zeige radial nach außen: $\omega_i(x) = x_i\phi(\|x\|)$, $\phi \in C^1((0,\infty),\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass ω exakt ist. Jedes Feld einer Zentralkraft $F(x) = x\phi(\|x\|)$ besitzt also ein Potential.

Hinweis: Wie kommt man auf den Ansatz $\omega = \mathrm{d}f$ mit $f(x) = \int_{r_0}^{\|x\|} \mathrm{d}r \; r\phi(r)$?

Aufgabe 38 *(a) 7 Zusatzpunkte, b) 7 Zusatzpunkte)*

a) Thermodynamik: p bezeichne den Druck von N Atomen, die bei Temperatur T in ein Volumen V eingesperrt sind. Weiterhin seien k_B die Boltzmannkonstante und $C_p > C_V$ die spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen bzw. Druck. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare, überschneidungsfreie (injektiv auf $[a,b)$) und geschlossene ($\gamma(a) = \gamma(b)$) Kurve, die den Rand ∂G der kompakten, glatt berandeten Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ im positiven Sinn durchläuft, d.h. es sei $\partial G = \gamma([a,b])$. $\partial_t\gamma(t)$ sei $\neq 0$ für alle t. Dann tauscht ein ideales Gas im quasistationären Kreisprozess $(p,V) = (p(t),V(t)) = \gamma(t)$ die Wärmemenge $W = \int_\gamma \frac{C_V}{Nk_B} V\mathrm{d}p + \frac{C_p}{Nk_B} p\mathrm{d}V$ mit seiner Umgebung aus.
Zeigen Sie $W = \frac{C_p - C_V}{Nk_B} \operatorname{vol} G$. Ist $\omega(p,V) = \frac{C_V}{Nk_B} V\mathrm{d}p + \frac{C_p}{Nk_B} p\mathrm{d}V$ exakt? Finden Sie alle nur von $T = \frac{pV}{Nk_B}$ abhängigen $g(T) = g(pV/(Nk_B))$, so dass $\mathrm{d}(g\omega) = 0$. Überprüfen Sie, dass $g\omega$ für $g = \frac{1}{T} = \frac{Nk_B}{pV}$ exakt ist.

b) Eine infinitesimal dünne Spule in $x = y = 0$ führt im Innern ein magnetisches Feld. Weil die Spule unendlich lang ist, bleibt der Außenraum $S = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ feldfrei. Bestimmen Sie das zugehörige Vektorpotential $A(x,y,z) = a(\sqrt{x^2+y^2}) \, (-y, x, 0)$ mit $\nabla \times A = 0$ in S und $a(1) = \Phi \in \mathbb{R}$.
Da das Problem nicht von z abhängt, sei die Welt von hier an zweidimensional ($z = 0$). In der Quantenmechanik kann sich ein Elektron außerhalb der Spule nicht entscheiden, ob es von seinem Ausgangsort aus auf einer Kurve γ_R rechts oder aber auf γ_L links an den stromführenden Windungen vorbeifliegt: Treffen die beiden Wege hinter der Spule wieder zusammen, so addieren sich die beiden Anteile ψ_R und ψ_L seiner Wellenfunktion. Ist $\psi^0_{L/R}$ die Wellenfunktion bei ausgeschalteter Spule $\Phi = 0$, so gilt nach Einschalten $\psi_{L/R} = \psi^0_{L/R} \exp(i \int_{\gamma_{L/R}} \omega)$ mit der dem Vektorfeld A entsprechenden 1–Form $\omega = a(\sqrt{x^2+y^2}) \, (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$. Beweisen Sie $|\psi_R + \psi_L|^2 = |\psi^0_R \, e^{2\pi i\Phi} + \psi^0_L|^2$. Das Interferenzbild wird von einem Magnetfeld verschoben, das das Elektron nie sieht! (*Aharonov–Bohm–Effekt*)