Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

14.1.2007

12. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 21.1. oder bis 22.1., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 33 *(5 Punkte)*

Sei $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Karte, $M = \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$ die dadurch parametrisierte Fläche und f auf M integrierbar. Überlegen Sie sich $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ und zeigen Sie damit $\int_M \mathrm{d}S\ f = \int_T \mathrm{d}(x,y)\ f(\varphi(x,y))\ \|\partial_x\varphi(x,y) \times \partial_y\varphi(x,y)\|$.

Aufgabe 34 *(a) 6 Punkte, b) 3 Zusatzpunkte)*

Sei $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $\varrho(x) = \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right)$ für $\|x\| < 1$ und $= 0$ sonst. Für $\varepsilon > 0$ und $c = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho$ bezeichne $\varrho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n}\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$. Für $V \subset \mathbb{R}^n$ sei $V^\varepsilon = \{x \in V : \mathrm{dist}(x, \partial V) > \varepsilon\}$.

a) Sei $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\tilde{\alpha}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y)\alpha(y)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie:

1. $\tilde{\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $0 \leq \tilde{\alpha} \leq 1$.
2. Ist $\alpha(x) = 0$ für $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\tilde{\alpha}(x) = 0$ für $x \in V^\varepsilon$.

Hinweis: Für die Differenzierbarkeit überprüfen Sie mit Lemma 2.11a die Voraussetzungen von Satz 2.23.

b) Wie in (7.15) sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_j : j = 1, \ldots, N\}$ eine Überdeckung von K durch offene Mengen. $\varepsilon > 0$ sei so klein, dass sogar $K \subset \bigcup_j U_j^{3\varepsilon}$. Weiterhin bezeichne $\{\alpha_j : j = 1, \ldots, N\}$ eine *den* U_j^ε *untergeordnete Zerlegung der* 1 *für* $\bigcup_j U_j^{2\varepsilon}$, also alle $\alpha_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien messbar mit $0 \leq \alpha_j \leq 1$, $\alpha_j(x) = 0$ für $x \notin U_j^\varepsilon$ und $\sum_j \alpha_j = 1$ auf $\bigcup_j U_j^{2\varepsilon}$.
Zeigen Sie: $\{\tilde{\alpha}_j : j = 1, \ldots, N\}$ ist eine *den* U_j *untergeordnete Zerlegung der* 1 *für* K aus C^∞–Funktionen.

Aufgabe 35 *(a) 4 Punkte, b) 4 Zusatzpunkte, c) 3 Zusatzpunkte)*

a) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $U \supset A$ eine offene Umgebung von A und $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei C^2–Funktionen. Beweisen Sie die beiden *Greenschen Formeln*

$$1. \int_A \mathrm{d}x\ \{f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g\} = \int_{\partial A} \mathrm{d}S\ \nu \cdot (f\ \nabla g), \quad 2. \int_A \mathrm{d}x\ \{f\Delta g - g\Delta f\} = \int_{\partial A} \mathrm{d}S\ \nu \cdot \{f\nabla g - g\nabla f\}\,.$$

b) Sei f wie in a), $\nu \cdot \nabla f = 0$ auf ∂A und $\Delta f \geq 0$ in A. Zeigen Sie, dass aus a) $\nabla f = 0$ in A folgt. Was bedeutet dies physikalisch, wenn Sie sich f als elektrostatisches Potential vorstellen?

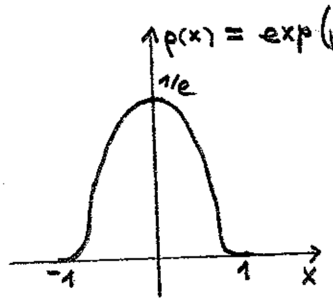
c) Im glatt berandeten Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^3$ seien zahlreiche Elektronen festgebunden: Ladungsdichte $\varrho : A \to \mathbb{R}$ (stetig). *Voodoo Physics* bietet Ihnen eine außerhalb von A aufzustellende Maschine an, die zu beliebig vorgegebenem stetigen $E_0 : \partial A \to \mathbb{R}$ ein stetiges, im Innern stetig differenzierbares elektrisches Feld $E : A \to \mathbb{R}$ erzeugt, welches auf ∂A gleich E_0 ist. Würden Sie für den Apparat Geld ausgeben?

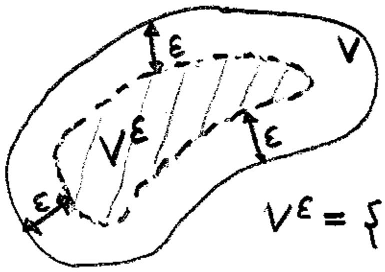
Aufgabe 36 *(5 Punkte)*

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit der Dichte $\varrho : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(v, \varrho$ stetig differenzierbar). Weil die Gesamtmasse erhalten bleibt, muss für jedes glatt berandete Kompaktum $G \subset U$ mit $\partial G \subset U$ die zeitliche Änderung $\partial_t \int_G \mathrm{d}x\ \varrho(x,t)$ der in G enthaltenen Flüssigkeitsmenge gleich der über den Rand ∂G in G einfließenden Flüssigkeit $-\int_{\partial G} \mathrm{d}S(x)\ \nu(x) \cdot (\varrho(x,t)v(x,t))$ sein. Beweisen Sie, dass dies äquivalent zur Kontinuitätsgleichung $\mathrm{div}(\varrho v) + \partial_t\varrho = 0$ auf $U \times \mathbb{R}$ ist.

Skizze zu 34:

a)





$V^\varepsilon = \{x \in V : \mathrm{dist}(x, \partial V) > \varepsilon\}$

b)