INSTITUT FÜR ANALYSIS 7.1.2007
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

11. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I

Abgabe in der Übung am 14.1. oder bis 15.1., 9 Uhr, in Postfach 147

Aufgabe 30 *(a) 3 Punkte, b) 3 Punkte, c) 5 Punkte + 2 Zusatzpunkte)*

a) Sei $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\varphi : I \to \varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch $\varphi(t) = (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t))$. Ist φ eine Immersion? Beweisen Sie, dass es keine Karte ist.

b) Nach Aufgabe 21a ist die Gruppe $SO(2)$ der Drehmatrizen eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie mit Hilfe des Drehwinkels eine Karte $\Phi : (0, 2\pi) \to SO(2) \subset \mathbb{R}^4$ an, und bestimmen Sie das eindimensionale Volumen von $SO(2)$.

c) S^{n-1} bezeichne die $(n-1)$–dimensionale Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Zeigen Sie für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\int_{S^{n-1}} \mathrm{d}S(x)\; x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_n^{\alpha_n - 1} = \begin{cases} \frac{2\ \Gamma(\frac{1}{2}\alpha_1)\cdots\Gamma(\frac{1}{2}\alpha_n)}{\Gamma(\frac{1}{2}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n))}, & \text{wenn alle } \alpha_j \text{ ungerade sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zusatz: Kommt damit für den Quadrupoltensor $Q_{ij} = \int_S \mathrm{d}S(x)\ \varrho(x)\ \{3x_i x_j - \|x\|^2 \delta_{ij}\}$ einer homogen mit $\varrho = 1$ geladenen zweidimensionalen Sphäre $S \subset \mathbb{R}^3$ vom Radius 1 um $(0, 0, a)$ etwas Einfaches heraus?

Hinweis: Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ e^{-\|x\|^2}\ x_1^{\alpha_1-1} \cdots x_n^{\alpha_n-1}$ doppelt: Einmal direkt als Produkt der n Gammafunktionen $\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\ t^{s-1} e^{-t}$, und dann mit den aus (6.27) der Vorlesung bekannten Polarkoordinaten $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ f(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^{n-1} \int_{S^{n-1}} \mathrm{d}S(t)\ f(rt)$. Für Q_{ij} helfen $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ aus Aufgabe 13.

Aufgabe 31 *(a) 4 Punkte, b) 3 Zusatzpunkte)*

a) In der Physik rechnet man oft mit einem Maßtensor g_{ij}, ohne die Details der Untermannigfaltigkeit M anzugeben: Kosmologen etwa beschreiben die drei Typen räumlich homogener Universen durch

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2))$$

$(0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi)$ mit einem zeitabhängigen Skalierungsfaktor $a > 0$. Für $\Sigma(\chi) = \sin(\chi)$ erhält man ein räumlich nur endlich ausgedehntes Universum $(0 < \chi < \pi)$, $\Sigma(\chi) = \chi$ liefert den ungekrümmten $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten $(0 < \chi < \infty)$, und $\Sigma(\chi) = \sinh(\chi)$ gibt ein unendlich ausgedehntes, gekrümmtes Weltall $(0 < \chi < \infty)$. Berechnen Sie in allen drei Fällen das Volumen V_Σ der durch $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$, $0 < \chi < \pi$ beschriebenen „Kugel."

b) Als „Radius" r_Σ der obigen Kugeln bezeichnet man das eindimensionale Volumen der bei festem θ, ϕ durch $0 < \chi < \pi$ parametrisierten Untermannigfaltigkeit. Vergleichen Sie $V_\Sigma r_\Sigma^{-3}$ für die Σs aus a).

Aufgabe 32 *(5 Punkte + 3 Zusatzpunkte)*

Der Senat der Uni möchte ab Sommer die Studienbedingungen mit einer Wasserrutsche im Lichthof verbessern. Wir haben exklusiv die vorläufigen Konstruktionspläne: Boden B und Seitenwände $S1$, $S2$ der Rutsche werden parametrisiert durch $\Phi_B : (a, b) \times (0, 13\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\Phi_{S1}, \Phi_{S2} : (0, 1) \times (0, 13\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi_B(t, \varphi) = \begin{pmatrix} t\cos(\varphi) \\ t\sin(\varphi) \\ h\varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi_{S1}(s, \varphi) = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ a\sin(\varphi) \\ \delta s + h\varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi_{S2}(s, \varphi) = \begin{pmatrix} b\cos(\varphi) \\ b\sin(\varphi) \\ \tau s + h\varphi \end{pmatrix}.$$

Über $a, b, h, \delta, \tau > 0$ wird noch diskutiert, nur $a < b$ und $\delta, \tau < 2\pi h$ steht schon fest. Wieviele Flächeneinheiten Rutschfliesen werden für B, $S1$ und $S2$ benötigt? Zusatzpunkte: Skizzieren Sie die Rutsche.