Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

17.12.2007

10. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Weihnachtsblatt

Abgabe bis 28.1. in der Übung oder in G103, nur sofern Sie noch Punkte für die Studienleistung benötigen

Aufgabe 22 *(je 2 Zusatzpunkte)*

a) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \frac{\cos(x)}{x^2}$ ist laut Vorlesung definiert. Berechnen Sie dieses Integral. Ist $\frac{\cos(x)}{x^2}$ integrierbar?

b) Gilt $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} - \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}$? Begründung?

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar. Man bestimme $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-n\sin^2(x)}$.

d) Geben Sie eine Folge $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbarer Funktionen an, die auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, so dass aber $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f_n = \infty$ ist.

e) Das Gravitationspotential $V(x) = -\int_K \mathrm{d}y\, \frac{\varrho(y)}{\|x-y\|}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$, eines kompakten Sterns $K \subset \mathbb{R}^3$ kennen Sie aus Aufgabe 9b. Beweisen Sie, dass ein Stern mit rotationssymmetrischer, integrierbarer Dichte $\varrho : K \to \mathbb{R}$ ein rotationssymmetrisches Potential V erzeugt.

f) Konvergiert die Funktionenreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx}$ in $L^1([0,\infty))$?

g) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $m(A) < \infty$. Zeigen Sie $L^p(A) \subset L^q(A)$ für $p \geq q$. (*Hinweis:* Hölder!)

h) Gibt es eine Funktion $u \in L^2_{2\pi}$ mit $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, u(x) \sin(kx) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$?

Aufgabe 23 *(4 Zusatzpunkte)*

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f : X \to X$ eine maßerhaltende Abbildung, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ und $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{A}$. Weiterhin sei f bijektiv und auch f^{-1} maßerhaltend. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann für μ–fast alle $x \in A$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) $f^k(x) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, (ii) $f^{-k}(x) \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\mu(A_0 \setminus (A_0 \cap A_1)) = \mu(A_1 \setminus (A_0 \cap A_1)) = 0$ für $A_0 = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A)$ und $A_1 = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(A)$.

Bemerkung: Wenn Sie zur Bemerkung von Aufgabe 3 zurückblättern, so gilt in der dort beschriebenen Situation also (zumindest mit Wahrscheinlichkeit 1): Ein zeitunabhängiges klassisches physikalisches System bleibt nur dann in der Zukunft nahe bei seinem Zustand zur Zeit 0, wenn es sich schon immer in der Nähe dieses Zustands befunden hat. Insbesondere strebt es *nicht* in irgendein *Gleichgewicht.*

Aufgabe 24 *(a) 4 Zusatzpunkte, b) 4 Zusatzpunkte)*

a) Rechtzeitig zu Weihnachten soll ein Stehaufmännchen gebastelt werden. Dazu werde auf die flache Seite einer eisernen Halbkugel (Radius 1) mit konstanter Dichte $\varrho = 8$ ein hölzerner Kegel der Höhe h und konstanter Dichte $\varrho = 1$ aufgeklebt. Für welche Kegelhöhen h wird sich das Stehaufmännchen tatsächlich aus horizontaler Lage in die Senkrechte aufrichten?

Hinweis: Der Schwerpunkt muss noch innerhalb der Halbkugel liegen.

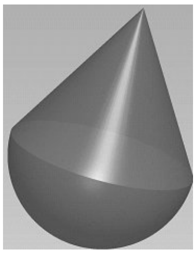

Abbildung 1: Das Stehaufmännchen aus Aufgabe 24a.

b) Mal wieder Archimedes: „Wenn in einen Würfel ein Zylinder eingeschrieben wird, der die Grundflächen in den gegenstehenden Quadraten hat und mit der Zylinderfläche die übrigen vier Ebenen berührt, und ferner in denselben Würfel ein zweiter Zylinder eingeschrieben wird, der die Grundflächen in zwei anderen Quadraten hat und mit der Zylinderfläche die vier übrigen Ebenen berührt, so wird der von den Zylinderflächen eingeschlossene Körper, der in beiden Zylindern enthalten ist, [dem Volumen nach] 2/3 des ganzen Würfels sein.“ Bitte überprüfen Sie dies!

Aufgabe 25 *(5 Zusatzpunkte)*

Sei $r : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a,b],\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2(z)\}$. (x_s, z_s) bezeichne den Schwerpunkt von $F = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a,b],\ 0 \leq x \leq r(z)\}$ (Dichte $\varrho = 1.$). Verifizieren Sie die *Guldinsche Regel* $m(R) = 2\pi x_s m(F)$.
Bestimmen Sie damit den Schwerpunkt der halben Kreisfläche $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0\}$.

Aufgabe 26 *(8 Zusatzpunkte)*

Wenn man schwach wechselwirkende Elementarteilchen (z.B. am CERN) oder einen stetigen Phasenübergang (etwa den Tripelpunkt des Wassers) mit Hilfe der Quantenfeldtheorie verstehen möchte, muss man Integrale wie $Z(g) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\phi\, e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4}$ in Abhängigkeit von der Wechselwirkungskonstanten g untersuchen. Ist Z in $g > 0$ stetig? Differenzierbar? C^∞? Entwickeln Sie Z um $g = 0$ in eine Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} \partial_g^k|_{g=0} Z(g)$, indem Sie *formal* $\partial_g^k|_{g=0}$ unter das Integral ziehen. Konvergiert die Reihe für $g \neq 0$?

Aufgabe 27 *(a) 6 Zusatzpunkte, b) 4 Zusatzpunkte)*

a) Zeigen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, indem Sie $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{1+xy}$ auf zwei verschiedene Arten ausrechnen: durch Reihenentwicklung bzw. mit Substitution $u(x) = x + \frac{1}{2}y(x^2 - 1)$ im inneren Integral plus Vertauschen der Integrationsreihenfolge. Folgern Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Die dreidimensionale Fermiverteilung $\varrho_F(x) = \left(1 + e^{(\|x\|-c)/z}\right)^{-1}$ mit Parametern $c, z > 0$ findet etwa bei der Modellierung von Atomkernen Verwendung. Beweisen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varrho_F = \frac{4\pi c^3}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi z}{c}\right)^2 - 6\left(\frac{z}{c}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} e^{-nc/z} \right\}.$$

Aufgabe 28 *(5 Zusatzpunkte)*

Sei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \|x\|^\alpha$, in $L^p(B_1(0))$ bzw. in $L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_1(0))$, und was ist jeweils die L^p–Norm? (*Hinweis:* Kugelkoordinaten!)

Aufgabe 29 *(4 Zusatzpunkte)*

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von $\chi_{[0,1]} \in L^2([-1,1])$ bezüglich der (normalisierten) Legendrepolynome $\{\sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ aus Aufgabe 16. (*Hinweis:* 16c und Hauptsatz liefern $\widehat{\chi_{[0,1]}}(n) \sim \partial_x P_n(0)$ für $n \neq 0$!)