Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

18.12.2007

9. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 20:

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $|f(x)|, |\partial_x f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{1+\varepsilon}}$ für gewisse $\varepsilon, M > 0$. Wir setzen $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x)e^{-i\xi x}$.

a) Zeigen Sie $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) \in C^1_{2\pi}$. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{F}(n)$ von F bezüglich $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ und beweisen Sie damit die Poissonsche Summenformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\ \mathcal{F}f(n).$$

F ist nach Definition 2π–periodisch, so dass wir nur die Differenzierbarkeit zeigen müssen. Nach Voraussetzung gilt für $x \in [-\pi, \pi]$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+2\pi n)| \leq |f(x)| + M \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} |x+2\pi n|^{-1-\varepsilon} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \frac{2M}{\pi^{1+\varepsilon}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |2n-1|^{-1-\varepsilon} < \infty$, und nach dem Weierstrassschen Majorantenkriterium konvergiert die Reihe gleichmäßig und die Grenzfunktion ist stetig (Sätze IV.5.5 und IV.6.1 in Eschers Analysis II–Vorlesung). $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\partial_x f(x+2\pi n)|$ können wir genauso abschätzen, so dass auch diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Zusammen folgt aus Korollar IV.6.5 bei Escher, dass $F(x) = \sum_n f(x+2\pi n) \in C^1_{2\pi}$.
Da $F(x)e^{-inx}$ als stetige Funktion über $[-\pi, \pi]$ Riemann–integrierbar ist, können wir nach Satz 2.24a das Lebesgueintegral als Riemannintegral ausrechnen. Wieder aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_n f(x+2\pi n)$ (Satz V.4.1 bei Escher) gilt für dieses $2\pi\hat{F}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ F(x)e^{-inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x+2\pi n)e^{-inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi+2\pi n}^{\pi+2\pi n} \mathrm{d}x\ f(x)e^{-in(x-2\pi n)} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x)e^{-inx} = \mathcal{F}f(n)$. Das Vertauschen von $\int$ und $\sum$ kann man auch mit dem Satz von der dominierten Konvergenz (Majorante $\sum_n |f(x+2\pi n)| \in L^1([-\pi,\pi])$) begründen. Weil $F \in C^1$, konvergiert nach Satz 5.19 die Fourierreihe von F punktweise gegen F, also $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}\mathcal{F}f(n)$ für alle x.

b) Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung für 2π–periodische Funktionen erhält man durch „Aufwickeln“ des bekannten nichtperiodischen Resultats:

$$G(x,y,t) = \chi_{[0,\infty)}(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y-2\pi n)^2}{4t}\right).$$

Beweisen Sie $G(x,y,t) = \chi_{[0,\infty)}(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\lambda_n t}\, \psi_n(x)\, \overline{\psi_n(y)}$, wobei $\psi_n \in C^2_{2\pi}$ auf $\int_0^{2\pi} \psi_n \overline{\psi_m} = \delta_{nm}$ normierte Eigenfunktionen von $-\partial_x^2$ zu Eigenwerten λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, sind. D.h. es gilt $-\partial_x^2\psi_n = \lambda_n\psi_n$.

Sei $\psi_n \in C^2_{2\pi}$ mit $-\partial_x^2\psi_n = \lambda_n\psi_n$. Nach Analysis II wird der Lösungsraum dieser Gleichung von $e^{i\sqrt{\lambda_n}x}$ und $e^{-i\sqrt{\lambda_n}x}$ aufgespannt. Solch eine Lösung ist nur dann 2π–periodisch, wenn $\sqrt{\lambda_n} \in \mathbb{Z}$, also $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx}$ ist entsprechend der Aufgabenstellung normiert. Mit der Summenformel für $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{4t})$, $\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{4\pi t}\exp(-t\xi^2)$ (siehe z.B. 4. Stundenübung):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y-2\pi n)^2}{4t}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-in(x-y)}\sqrt{4\pi t}e^{-tn^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\lambda_n t}\, \psi_n(x)\, \overline{\psi_n(y)}.$$

c) Zusätzlich sei $\mathcal{F}f(\xi) = 0$ für alle $|\xi| > c$. Zeigen Sie $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\frac{n\pi}{c})\ \frac{\sin(cx-n\pi)}{cx-n\pi}$, indem Sie die Summenformel für ein geeignetes $\lambda > 0$ auf $\mathcal{F}f_\lambda$, $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, anwenden. Sie können also f aus

Messwerten bei den Vielfachen von $\frac{\pi}{c}$ *rekonstruieren. Das kleinstmögliche* $\frac{c}{\pi}$ *wird auch* Nyquistfrequenz *genannt. Was hat dieses* Abtasttheorem von Shannon *mit der Größe Ihres iPods zu tun?*

Für $\lambda > 0$ sei $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Dann ist $\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = \int \mathrm{d}x\ e^{-ix\xi} f(\lambda x) = \lambda^{-1} \int \mathrm{d}x\ e^{-ix\frac{\xi}{\lambda}} f(x) = \lambda^{-1}\mathcal{F}f(\frac{\xi}{\lambda})$. Wir wählen $\lambda = \frac{\pi}{c}$, so dass die rechte Seite für $|\xi| > \lambda c = \pi$ verschwindet. Die Summenformel für $\mathcal{F}f_\lambda$ sagt dann $\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f_\lambda(\xi + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\xi}\ \mathcal{F}(\mathcal{F}f_\lambda)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\xi}\ f_\lambda(-n)$, wobei wir im letzen Schritt die in der Aufgabenstellung angegebene Umkehrformel für die Fouriertransformation verwendet haben. Wir benennen den Summationsindex n in $-n$ um und integrieren beide Seiten: $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\xi\ e^{iy\xi}\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\xi\ e^{iy\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\xi}\ f_\lambda(n)$. Da $\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = 0$ für $|\xi| > \pi$, ist die linke Seite $= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi\ e^{iy\xi}\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = 2\pi f_\lambda(y)$ nochmal mit der Umkehrformel. Wie in a) ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{iy\xi - in\xi}\ f_\lambda(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_\lambda(n)| =: C < \infty$, so dass die konstante Funktion, die überall gleich C ist, eine n–unabhängige integrierbare Majorante für den Integranden liefert und, wie in vielen früheren Aufgaben, der Satz von der dominierten Konvergenz auch hier das Vertauschen von $\int$ und $\sum$ erlaubt. Die rechte Seite ist folglich $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\xi\ e^{i(y-n)\xi}\ f_\lambda(n) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin((y-n)\pi)}{y-n}\ f_\lambda(n)$. Insgesamt $2\pi f(\frac{\pi y}{c}) = 2\pi f_\lambda(y) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin((y-n)\pi)}{y-n}\ f_\lambda(n) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin((y-n)\pi)}{y-n}\ f(\frac{\pi n}{c})$. $y = \frac{cx}{\pi}$ liefert die Behauptung.
Da der Mensch nur Frequenzen kleiner als etwa c=20 kHz warnehmen kann, brauchen wir die Frequenzen $> c$ nicht speichern. Der iPod spielt dann also nur den Song $f(t)$ mit Frequenzen $< c$, aber dafür sagt Shannon, dass wir statt $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ lediglich die diskret vielen $f(\frac{n\pi}{c})$ kennen müssen. Es muss also gar nicht so viel Information gespeichert werden, und der iPod kann klein bleiben.

Aufgabe 21:

a) Schreiben Sie die Gruppe der orthogonalen 2×2*–Matrizen,*

$$O(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : XX^T = E_2 \right\},$$

als Nullstellenmenge einer Funktion $f : M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *mit* Rang $\partial f = 3$ *auf* $O(2)$*. Ist* $O(2)$ *eine Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^4$*? Gilt das auch für die Teilmenge* $SO(2) = \{X \in O(2) : \det X = 1\}$*?*

$XX^T = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1x_3 + x_2x_4 \\ x_1x_3 + x_2x_4 & x_3^2 + x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ liefert $O(2)$ als Nullstellenmenge von $f = (f_1, f_2, f_3) : M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_1x_3 + x_2x_4, x_3^2 + x_4^2 - 1)$. *Annahme:* $\exists X \in O(2)$ mit Rang $\partial f =$ Rang $\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} < 3$. Wegen $f_1(x) = 0$ ist entweder $x_1 \neq 0$ oder $x_2 \neq 0$, und analog für x_3 und x_4. Daher sind die ersten beiden Zeilen von ∂f linear unabhängig und somit Rang $\partial f \geq 2$. Ist die dritte Zeile Linearkombination der anderen, so ist $2\lambda\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_3}{x_4}$ und $2\mu\binom{x_3}{x_4} = \binom{x_1}{x_2}$ für gewisse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Da $x_3 \neq 0$ oder $x_4 \neq 0$ ist $\lambda \neq 0$ und analog $\mu \neq 0$, so dass $x_1 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$ und $x_2 = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0$. Mit $f_2(x) = 0$ folgt daher, dass $x_i = 0$ für ein i das Verschwinden aller x_i impliziert, was nicht sein kann. Also $x_i \neq 0$ für alle i. Daher $\lambda = \frac{x_3}{2x_1}$ und $x_4 = \frac{x_3x_2}{x_1}$ und mit $x_1x_3 = -x_2x_4$ (d.h. $f_2(x) = 0$): $-\frac{x_1x_3}{x_2} = x_4 = \frac{x_3x_2}{x_1} \Rightarrow 0 > -x_1^2 = x_2^2 < 0$. Widerspruch! Also Rang $\partial f = 3$ auf $O(2)$ und nach Definition ist $O(2)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Vermutlich geht es auch einfacher.
$\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist als Polynom eine stetige Funktion, die auf $O(2)$ die Werte ± 1 annimmt. $SO(2)$ ist als Urbild der offenen Menge $(0, 2)$ offen in $O(2)$ und somit ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit. Konkreter gesagt (es gibt auch andere Begründungen): Weil det stetig ist und $= 1$ auf $SO(2)$, gibt es nach Definition von „stetig“ eine offene Umgebung $U \subset M_2(\mathbb{R})$, die $SO(2)$, aber nicht $Z = \{X \in O(2) : \det X = -1\}$ enthält (z.B. kann man U als Urbild von $(0, 2)$ unter der Funktion det wählen). Dann ist $SO(2) = O(2) \cap U$ die Nullstellenmenge des obigen f, eingeschränkt auf U. Der Rang von ∂f ist natürlich maximal, da er sogar auf ganz $O(2)$ maximal ist.

b) Sei $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ *die Oberfläche der Einheitskugel im* $\mathbb{R}^3$*.* N *bezeichne den Nordpol* $(0, 0, 1) \in S^2$*,* S *den Südpol* $(0, 0, -1) \in S^2$*. Zeigen Sie, dass die* stereographischen Projektionen $f_N : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$ *und* $f_S : S^2 \setminus S \to \mathbb{R}^2$*,*

$$f_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3 - 1}, \frac{x_2}{x_3 - 1}\right), \quad f_S(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3 + 1}, \frac{x_2}{x_3 + 1}\right),$$

Homöomorphismen mit Rang ∂f_N^{-1} = Rang $\partial f_S^{-1} = 2$ *sind. (Die Inversen kann man explizit ausrechnen!).*

Ausrechnen der Inversen: Setze $(X,Y) = \left(\frac{x_1}{x_3 \pm 1}, \frac{x_2}{x_3 \pm 1}\right)$. Wegen $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ist $R^2 := X^2 + Y^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_3 \pm 1)^2} = \frac{1 \mp x_3}{1 \pm x_3}$. Dies gilt genau dann, wenn $x_3 = \mp \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1}$, und es folgt $x_1 = X(1 \pm x_3) = \frac{2X}{R^2+1}$ und $x_2 = Y(1 \pm x_3) = \frac{2Y}{R^2+1}$. Man verifiziert leicht, dass daher für $g_N : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus N$, $g_S : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus S$, $g_{N/S}(X,Y) = \frac{1}{X^2+Y^2+1}(2X, 2Y, \mp(X^2 + Y^2 - 1))$ die Kompositionen $f_N \circ g_N$, $g_N \circ f_N$, $f_S \circ g_S$ und $g_S \circ f_S$ die Identität ergeben. $f_{N/S}$ und $f_{N/S}^{-1} = g_{N/S}$ sind stetig auf ihren Definitionsbereichen, d.h. $f_{N/S}$ Homöomorphismen. Für die Ableitung berechnet man

$$\partial g_{N/S}(X,Y) = \frac{1}{(X^2+Y^2+1)^2} \begin{pmatrix} -2X^2 + 2Y^2 + 2 & -4XY & \mp 4X \\ -4XY & 2X^2 - 2Y^2 + 2 & \mp 4Y \end{pmatrix}.$$

Zwei Spalten sind linear unabhängig, wenn die Determinante der aus diesen zwei Spalten bestehenden Matrix verschwindet. Die Determinante der ersten beiden Spalten ist $(-2X^2 + 2Y^2 + 2)(2X^2 - 2Y^2 + 2) - (-4XY)^2 = -4(X^2+Y^2)^2 + 4 \neq 0$, solange $X^2 + Y^2 \neq 1$. Die Determinante der 1. und 3. Spalte ist $\mp 8Y(1 + X^2 + Y^2) \neq 0$, falls $Y \neq 0$, und für die 2. und 3. Spalte bekommt man $\mp 8X(1 + X^2 + Y^2) \neq 0$, falls $X \neq 0$. Da für beliebiges $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ mindestens eine der Determinanten nicht verschwindet, besitzt $\partial g_{N/S}(X,Y)$ immer zwei linear unabhängige Spalten und hat demnach den Rang 2.

c) Sei $I = (0, 2\pi)$ *und* $\gamma : I \to \gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ *definiert durch* $\gamma(t) = (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t))$. *Ist* γ *ein Homöomorphismus?*

Da γ nicht einmal bijektiv ist ($\gamma(\frac{\pi}{2}) = \gamma(\pi) = (0,0)$), kann γ kein Homöomorphismus sein. Diese Aufgabe wurde natürlich nur durch einen bösen Tippfehler so einfach.