Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

11.12.2007

8. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 17:

a) Nach 15a) ist die Fourierreihe von $f \in L^2_{2\pi}$, $f(x) = \pi - x = -f(-x)$ für $x \in (0,\pi)$ und $= 0$ in $x \in \{0,\pi\}$, durch $\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{-i}{n} e^{inx}$ gegeben. Berechnen Sie damit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

f ist in jedem $x \in (0, 2\pi)$ differenzierbar, so dass dort $\frac{\pi-x}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{-i}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ gilt. $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = 1 - \frac{\pi}{4}$. Nach Übung darf man die Fourierreihe gliedweise integrieren und die integrierte Reihe konvergiert punktweise: $-\frac{(\pi-x)^2}{4} - C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, integrieren wir beide Seiten: $\frac{\pi^3}{6} + 2\pi C = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \left\{ \frac{(\pi-x)^2}{4} + C \right\} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = 0$ oder $C = -\frac{\pi^2}{12}$. Auswerten der Reihe in $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Fourierreihe nochmals integrieren: $-\frac{(\pi-x)^3}{12} + Cx + D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. D bestimmt sich analog zu C, oder einfacher durch Auswerten in $x = 0$: $-\frac{(\pi-0)^3}{12} + 0C + D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(0n)}{n^3} = 0$ oder $D = \frac{\pi^3}{12}$. Nochmals integrieren und bestimmen der Integrationskonstante: $-\frac{(\pi-x)^4}{48} + \frac{\pi^2}{24}x^2 - \frac{\pi^3}{12}x + \frac{23\pi^4}{720} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4}$. Auswerten in $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

b) Betrachten Sie eine lineare Kette aus Edelgasatomen im Abstand R. Die Wechselwirkung zweier um r voneinander entfernter Atome kann durch das Lennard-Jones-Potential $V(r) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right)$ angenähert werden ($\varepsilon, \sigma > 0$). Meist wird $n = 12$ verwendet, um Rechenarbeit zu sparen, wählen wir aber $n = 8$. Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie $E(R) = \sum_{j\neq 0} V(jR)$ eines Atoms mit der übrigen Kette und bestimmen Sie im Gleichgewicht $\partial_R E(R) = 0$ den Abstand R als Funktion von ε und σ.

Parseval für $p(x) := -\frac{(\pi-x)^3}{12} + Cx + D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{-i}{2n^3} e^{inx}$ aus a): $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ |p(x)|^2 = \frac{\pi^6}{1890}$. Andererseits $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{p}(n)|^2 = \frac{1}{4}\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$. Also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. Analog gibt Parseval für $-\frac{(\pi-x)^4}{48} + \frac{\pi^2}{24}x^2 - \frac{\pi^3}{12}x + \frac{23\pi^4}{720} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4} = \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n^4} e^{inx}$ das Resultat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$. Also $E(R) = 2\sum_{n=1}^{\infty} V(nR) = 8\varepsilon \left\{ \frac{\sigma^8}{R^8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} - \frac{\sigma^6}{R^6}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \right\} = \frac{8\varepsilon}{9450}\left(\frac{\pi\sigma}{R}\right)^8 - \frac{8\varepsilon}{945}\left(\frac{\pi\sigma}{R}\right)^6$ und damit $\partial_R E(R) = -8\frac{8\varepsilon}{9450}\frac{(\pi\sigma)^8}{R^9} + 6\frac{8\varepsilon}{945}\frac{(\pi\sigma)^6}{R^7}$. Im Gleichgewicht $\partial_R E(R) = 0$ ist $R^2 = \frac{2}{15}(\pi\sigma)^2$.

Aufgabe 18:

Für $f \in L^2_{2\pi}$ bezeichne $\hat{f}(n)$ den n–ten Fourierkoeffizienten bezüglich $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$.

a) Ist $f \in C^k_{2\pi}$, so ist $\sum_n n^{2k}|\hat{f}(n)|^2 < \infty$.

Aus der Übung folgt für die Fourierkoeffizienten von $\partial_x^k f$: $\widehat{\partial_x^k f}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$. Weil $\partial_x^k f$ stetig und insbesondere in $L^2_{2\pi}$ ist, gilt nach der Besselgleichung $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2k}|\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\partial_x^k f}(n)|^2 = \|\partial_x^k f\|^2 < \infty$.

b) Gilt $\sum_n n^{2k+\alpha}|c_n|^2 < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $\alpha > 1$, so sind die c_n die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in C^k_{2\pi}$.

Wir zeigen, dass $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in C^k_{2\pi}$. Diese Funktion hat dann die Fourierkoeffizienten c_n. Wir zeigen, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^m c_n e^{inx}$, $0 \leq m \leq k$, gleichmäßig konvergiert. Nach der Hölderungleichung für $p =$

2 oder auch der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist (mit $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$) $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|^m|c_n| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|^k|c_n| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|^{k+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}|c_n| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|^{2(k+\frac{\alpha}{2})}|c_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|^{-2(\frac{\alpha}{2})}\right)^{1/2} < \infty$, weil beide Faktoren $< \infty$ sind ($\alpha > 1$!). Mit dem Weierstrassschen Majorantenkriterium ($|(in)^m c_n e^{inx}| \le |n|^m|c_n|$, Satz IV.5.5 in Eschers Analysis II–Vorlesung) oder fast nach Definition konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(in)^m c_n e^{inx}$ also normal und insbesondere gleichmäßig, so dass nach Satz IV.6.1 von Escher $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(in)^m c_n e^{inx}$ eine stetige Funktion definiert ($m \le k$). Nach Übung ist dies gerade $\partial_x^m f$, d.h. $f \in C^k_{2\pi}$.

Aufgabe 19:

Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass sich viele physikalische Systeme in geeigneten Koordinaten $I_1(t), \dots, I_n(t)$ *auf eine periodische Zeitentwicklung* $I_j(t) = e^{i\varphi_j(t)}$, $\varphi_j(t) = \varphi_{j,0} + \omega_j t$ *für* $t, \varphi_{j,0}, \omega_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, *zurückführen lassen (Wirkungs- und Winkelvariablen, siehe z.B. Goldstein).*
Sei $C_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ stetig } : f(x_1 + 2\pi k_1, \dots, x_n + 2\pi k_n) = f(x_1, \dots, x_n)\ \forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$ *der Vektorraum der in allen* n *Variablen* 2π*–periodischen stetigen Funktionen. Für eine zu messende Größe* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *ist es praktisch oft einfacher, den* zeitlichen Mittelwert *(falls er existiert)*

$$\langle f(\varphi_0)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t)$$

als den räumlichen Mittelwert $\bar f = (2\pi)^{-n} \int_{[0,2\pi]^n} \mathrm{d}x\ f(x)$ *zu bestimmen.*

a) Zeigen Sie: Sind $\omega_1, \dots, \omega_n$ *linear unabhängig über* $\mathbb{Q}$ *(d.h. sind* $q_j \in \mathbb{Q}$ *mit* $q_1\omega_1 + \dots + q_n\omega_n = 0$, *dann sind alle* $q_j = 0$*), und* $f(x_1, \dots, x_n) = e^{ik_1x_1+\dots+ik_nx_n}$ *für gewisse* $k_j \in \mathbb{Z}$, *so existiert* $\langle f(\varphi_0)\rangle$ *für alle* $\varphi_{j,0} \in \mathbb{R}$ *und stimmt mit* $\bar f$ *überein.*

Ist $k = 0 \in \mathbb{Z}^n$, dann ist $f = \bar f = \langle f(\varphi_0)\rangle = 1$. Sei also $0 \ne k \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $\bar f = 0$, da $\int_{[0,2\pi]^n} \mathrm{d}x\ e^{ik_1x_1+\dots+ik_nx_n} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x_1\ e^{ik_1x_1} \cdots \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x_n\ e^{ik_nx_n} = 0$. Auch das zeitliche Mittel $\langle f(\varphi_0)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, e^{ik_1(\varphi_{1,0}+\omega_1 t)+\dots+ik_n(\varphi_{n,0}+\omega_n t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ e^{i\langle k,\varphi_0\rangle}\ \frac{1}{i\langle k,\omega\rangle}\ (e^{i\langle k,\omega\rangle T} - 1) = 0$ für alle $\varphi_{j,0} \in \mathbb{R}$, wobei wir kurz $\langle k, \omega\rangle = k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n$ und $\langle k, \varphi_0\rangle = k_1\varphi_{1,0} + \dots + k_n\varphi_{n,0}$ schreiben. (Dass $\omega_1, \dots, \omega_n$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind, benötigen wir beim Integrieren, damit der Nenner $i\langle k, \omega\rangle \ne 0$!)

b) Wie im Beweis des Hauptsatzes 5.16 kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ *und* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *eine endliche Linearkombination* g *von Funktionen aus* $B = \{e^{ik_1x_1+\dots+ik_nx_n} : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}$ *finden, so dass* $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$. *Zeigen Sie damit* $\langle f(\varphi_0)\rangle = \bar f$ *für alle* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *und alle* $\varphi_{j,0} \in \mathbb{R}$, *falls* $\omega_1, \dots, \omega_n$ *linear unabhängig über* $\mathbb{Q}$ *sind.*

Sei $\varepsilon > 0$ und g eine Linearkombination von Funktionen aus B mit $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann ist $|\bar f - \bar g| \le (2\pi)^{-n}\int_{[0,2\pi]^n} \mathrm{d}x\ |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, da $|\int \cdots| \le \int |\cdots|$, und ebenso

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ \left(g(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t) - f(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $T > 0$. Nach a) stimmen räumlicher und zeitlicher Mittelwert für jeden der Terme von g überein, so dass $\langle g(\varphi_0)\rangle = \bar g$. Nach Definition von $\lim_{T\to\infty}$ gibt es daher ein $T_\varepsilon > 0$, so dass $|\bar g - \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, g(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $T > T_\varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt insgesamt für $T > T_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|\bar f - \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t)| \quad &\le \quad |\bar f - \bar g| + |\bar g - \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, g(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t)| \\
&\quad + |\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ \left(g(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t) - f(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t)\right)| \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig, so dass $\bar f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, f(\varphi_{1,0} + \omega_1 t, \dots, \varphi_{n,0} + \omega_n t) = \langle f(\varphi_0)\rangle$.