Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

4.12.2007

7. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 14:

a) Gibt es eine Funktion $f \in L^2([0,2\pi])$ mit $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ e^{ik^3x} = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$?

Ja: Nach Übung bilden die $v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ eine orthonormale Teilmenge von $L^2([0,2\pi])$. Gesucht ist ein $f \in L^2([0,2\pi])$ mit $\langle f, v_{-k^3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ e^{ik^3x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}k}$. Falls $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}k}\ v_{-k^3}$ in $L^2([0,2\pi])$ ist, so hat f die gewünschten Fourierkoeffizienten. Nach Besselgleichung 5.8(iii) ist $\|f\|_2^2 = \sum_k |\langle f, v_{-k^3}\rangle|^2 = \sum_k \frac{1}{2\pi k^2} < \infty$, also $f \in L^2([0,2\pi])$.

b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei eine Folge stetiger Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ für ein $f \in L^2([0,1])$. Ist f stetig?

Nein: Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ eine Nullfolge und $f \in L^2([0,1])$ unstetig, z.B. $f = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$. Nach Satz 4.16 gibt es zu jedem ε_n ein stetiges f_n mit $\|f - f_n\|_2 < \varepsilon_n$. Also $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, aber f ist unstetig.

c) Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Beweisen Sie für $x, y \in H$ die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$, indem Sie das Minimum von $\Delta(\lambda) = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ bestimmen.

Für $y \neq 0$ ist $\Delta \ge 0$ ein reelles quadratisches Polynom, hat also irgendwo ein Minimum, in dem $\partial_\lambda \Delta(\lambda) = 0$ ist. Also $2\lambda\|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 2\lambda\|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = 0$ oder $\lambda = -\frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$. Einsetzen in $0 \le \Delta$ liefert $0 \le \|x\|^2 - 2\frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\ \mathrm{Re}\ \langle x,y\rangle + \left(-\frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\right)^2 \|y\|^2$ oder nach Umformen $|\mathrm{Re}\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$.
Schreibt man $\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| e^{i\varphi}$ in Polardarstellung für ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so ist nach obigem $|\mathrm{Re}\langle x, e^{i\varphi}y\rangle| \le \|x\|\|e^{i\varphi}y\| = \|x\|\|y\|$ und $|\mathrm{Re}\langle x, e^{i\varphi}y\rangle| = |\mathrm{Re}\ e^{-i\varphi}\langle x,y\rangle| = |\mathrm{Re}|\langle x,y\rangle|| = |\langle x,y\rangle|$.
Dies erhält man auch, wenn man $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} \in \mathbb{C}$ in $0 \le \Delta(\lambda)$ einsetzt.

d) BMW möchte im Labor den Zusammenhang von Bremsweg x und Anfangsgeschwindigkeit v bei seinem neuen Modell herausfinden. Die Techniker benutzen den Ansatz $x = a_n v^n + a_{n-1}v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0$. Zur Bestimmung der Parameter $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ werden $m > n$ Messungen mit Ergebnissen $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ bei Geschwindigkeiten $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ durchgeführt. a soll so gewählt werden, dass sowohl der quadratische Fehler $\sum_j (x_j - a_n v_j^n - a_{n-1}v_j^{n-1} - \cdots - a_1 v_j - a_0)^2 = \|x - Va\|_2^2$, $V = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & v_m & \cdots & v_m^n \end{pmatrix}$, als auch $\|a\|_2$ so klein wie möglich sind. Zeigen Sie, dass a die eindeutige Lösung von $V^TVa = V^Tx$ mit $a \in (\mathrm{Kern}\ V)^\perp$ ist.

$\|x - Va\|_2^2$ ist ein nichtnegatives Polynom in den a_j, so dass ein Minimum existiert. Nach Satz 5.1 ist $\mathbb{R}^m = \mathrm{Bild}\ V \oplus (\mathrm{Bild}\ V)^\perp$, und $\|x - Va\|$ ist minimal $\Leftrightarrow$ $x - Va \in (\mathrm{Bild}\ V)^\perp$. Also genau dann, wenn für alle $b \in \mathbb{R}^{n+1}$: $0 = \langle x - Va, Vb\rangle = \langle V^T(x - Va), b\rangle$. Setzt man nacheinander $b = (1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)$, so sieht man, dass alle Komponenten von $V^T(x - Va)$ verschwinden, d.h. $V^TVa = V^Tx$. Man kann auch den Gradienten von $\Phi(a) = \|x - Va\|_2^2$ Null setzen, allerdings muss man dann begründen, weshalb man ein Minimum erhält. Die allgemeine Lösung von $V^TVa = V^Tx$ ist $a_0 + \mathrm{Kern}\ V^TV$ für ein $a_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Behauptung: $\mathrm{Kern}\ V^TV = \mathrm{Kern}\ V$: $\supset$ ist klar. Sei $b \in \mathrm{Kern}\ V^TV$. Dann ist $0 = \langle b, V^TVb\rangle = \langle Vb, Vb\rangle = \|Vb\|^2$, also $Vb = 0$, d.h. $b \in \mathrm{Kern}\ V$. Die allgemeine Lösung ist also $a_0 + \mathrm{Kern}\ V$. Nach Satz 5.1 ist $\|a_0 + a\|$, $a \in \mathrm{Kern}\ V$, minimal $\Leftrightarrow$ $a_0 + a \in (\mathrm{Kern}\ V)^\perp$.

Aufgabe 15:

a) Berechnen Sie die Koeffizienten c_n der Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ von $f \in L^2([0,2\pi])$, $f(x) = \pi - x$.

$c_n = \langle f, v_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} (\pi - x) e^{-inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-inx}}{n^2} - \frac{ixe^{-inx}}{n} \right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{-\sqrt{2\pi} i}{n}$ für $n \neq 0$ und $= 0$ für $n = 0$.

b) Der Fehler bei Approximation durch die N–te Partialsumme der Reihe ist $g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} - (\pi - x)$. Zeigen Sie $\partial_x g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$. x_N bezeichne den kleinsten kritischen Punkt > 0 von g_N. Verifizieren Sie $g_N(x_N) = \int_0^{x_N} \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \mathrm{d}x - \pi$ und $\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} g_N(x) > 0$. Skizzieren Sie, was hier passiert.

Mit c_n aus a): $\partial_x g_N(x) = \sum_{0\neq n=-N}^{N} \frac{-i}{n} \partial_x e^{inx} - \partial_x(\pi - x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = e^{-iNx} \frac{1-e^{i(2N+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$. Da $g_N(0) = -\pi$ folgt $g_N(x) = \int_0^x \mathrm{d}x \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} - \pi$. Das kleinste $x > 0$ mit $\partial_x g_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = 0$ ist $x_N = \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}$ und $g_N(x_N) = \int_0^{x_N} \mathrm{d}x \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} - \pi = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \frac{(N+\frac{1}{2})^{-1}}{\sin((2N+1)^{-1}x)} \sin(x) - \pi \to 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{x} - \pi$ für $N \to \infty$ mit dem Satz von der dominierten Konvergenz sowie $\frac{(N+\frac{1}{2})^{-1}}{\sin((2N+1)^{-1}x)} \to \frac{2}{x}$. Deshalb $\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} g_N(x) \geq \lim_{N\to\infty} g_N(x_N) = 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{x} - \pi = 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{x} - 2\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{x} > 0$, da alle Summanden < 0 sind. Die N–ten Partialsummen der Fourierreihe konvergieren also für $x \neq 0, 2\pi$ gegen $f(x)$, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig: Nahe $x = 0$ (und ähnlich nahe $x = 2\pi$) entwickeln die Partialsummen Spitzen in x_N, die zwar immer schmaler werden, aber deren Höhe auch für $N \to \infty$ um $2\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \frac{\sin(x)}{x} - \pi \approx 0{,}562$ von $f(x_N)$ abweicht. Dies wird auch als Gibbs–Phänomen bezeichnet.
Weil die Aufgabe so unglücklich formuliert war, ist $\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} g_N(x) \geq \lim_{N\to\infty} g_N(2\pi) = \lim_{N\to\infty} \pi = \pi > 0$ auch richtig und viel einfacher. Hier ist die Interpretation, dass die periodische Fortsetzung von f in 0, 2π springt, alle Partialsummen aber stetig sind, so dass g_N in jeder Umgebung dieser Punkte nicht gleichmäßig konvergieren kann (die Grenzfunktion wäre sonst stetig) und daher der maximale Fehler in $[0, 2\pi]$ auch für $N \to \infty$ echt größer als 0 bleiben muss.

Aufgabe 16:

a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Legendre–Polynome *P_n durch $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \partial_x^n [(x^2-1)^n]$. Beweisen Sie, dass $\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine orthogonale Teilmenge von $L^2([-1,1])$ bildet und dass $\|P_n\|_2^2 = \frac{2}{2n+1}$.*

Sei $n > m$. $(x^2-1)^n$ hat in $x = \pm 1$ Nullstellen n–ter Ordnung, d.h. $\partial_x^{\alpha}|_{x=\pm 1}(x^2-1)^n = 0$ für $\alpha < n$.

$$\begin{aligned} \langle P_n, P_m \rangle = \langle P_m, P_n \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; P_m(x) \partial_x^n (x^2-1)^n = \frac{-1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; (\partial_x P_m(x)) \partial_x^{n-1} (x^2-1)^n \\ &= \cdots = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; (\partial_x^n P_m(x))(x^2-1)^n \end{aligned}$$

durch n partielle Integrationen. Da P_m ein Polynom m–ten Grades ist und $m < n$, gilt $\partial_x^n P_m(x) = 0$, also $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ für alle $n \neq m$. Für $n = m$ ist $\partial_x^n P_n(x)$ gleich $n!$ mal dem Koeffizienten vor x^n in $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \partial_x^n [x^{2n} + \cdots] = \frac{1}{2^n n!}((2n)(2n-1)\cdots(n+1)x^n + \cdots)$, also $= n! \frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ und $\langle P_n, P_n \rangle = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; (\partial_x^n P_n(x))(x^2-1)^n = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; (x^2-1)^n$. Dieses Integral über ein Polynom kann man z.B. termweise ausrechnen. Schneller geht es wieder einmal mit Aufgabe 10b, den Werten der Gammafunktion aus Aufgabe 13 und der Substitution $t = x^2$, $\frac{1}{2} t^{-1/2} \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$: $(-1)^n \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; (x^2-1)^n = 2\int_0^1 \mathrm{d}x \; (1-x^2)^n = \int_0^1 \mathrm{d}t \; (1-t)^n t^{-1/2} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{n!}{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(n+\frac{1}{2})}$, so dass $\langle P_n, P_n \rangle = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{n!}{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(n+\frac{1}{2})} = \frac{2}{2n+1}$.

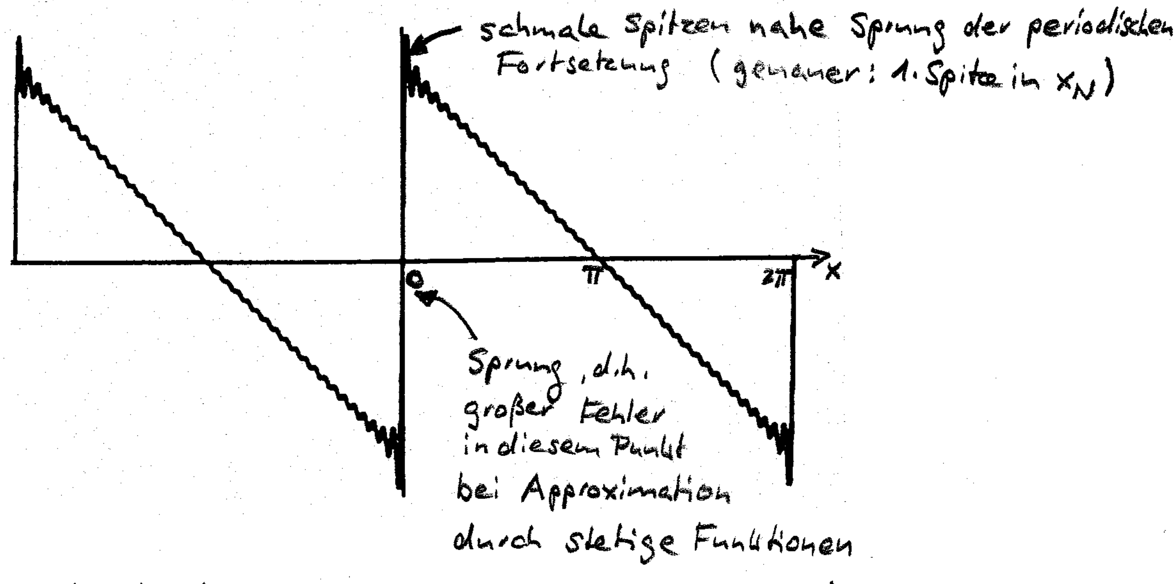
b) Seien $x_{1,n}, \ldots, x_{k,n} \in (-1,1)$ die Punkte, an denen P_n sein Vorzeichen wechselt. Überlegen Sie mit Hilfe von $Q_n(x) = \Pi_j (x - x_{j,n})$, dass P_n genau n verschiedene Nullstellen in $(-1,1)$ hat.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra wechselt P_n nicht öfter als n–mal sein Vorzeichen, also $k \leq n$. Da P_n ein Polynom genau n–ten Grades ist, lässt sich $Q_n(x) = \Pi_j(x - x_{j,n})$ als Polynom vom Grad k als $Q_n(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j P_j(x)$ für gewisse $\alpha_j \in \mathbb{C}$ schreiben. Aus a) folgt daher $\langle Q_n, P_n \rangle = 0$ falls $k < n$. Da Q_n sein Vorzeichen an denselben Stellen wie P_n wechselt, gilt entweder $Q_n P_n \geq 0$ oder $Q_n P_n \leq 0$ auf $[-1, 1]$, und $Q_n P_n$ ist nicht $\equiv 0$. Somit $\langle Q_n, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, Q_n(x) P_n(x) \neq 0$, also $k \not< n$, d.h. $k = n$.

c) Zeigen Sie $(1 - x^2)\partial_x^2 P_n(x) - 2x\partial_x P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$.

Es gibt viele Wege, z.B. auch mit der expliziten Formel für die P_n. Hier ein impliziter, der ausgiebig die Orthogonalität der P_n ausnutzt: Die zu zeigende Gleichung besagt $g(x) := \partial_x \left[(1 - x^2)\partial_x P_n(x)\right] = -n(n+1)P_n(x)$. g ist ein Polynom vom Grad n, weil $\partial_x P_n(x)$ Grad $n-1$, also $(1-x^2)\partial_x P_n(x)$ Grad $n+1$ hat. Nach a) ist $g(x) = \partial_x \left[(1 - x^2)\partial_x \left(\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \cdots\right)\right] = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\partial_x \left[(-x^2) n x^{n-1} + \cdots\right] = -n(n+1)\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n = -n(n+1)P_n(x) + \cdots$ ($\cdots =$ Terme niedrigerer Ordnung), so dass $g + n(n-1)P_n$ ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ ist. Daher ist $g + n(n-1)P_n$ wie in b) eine Linearkombination $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j P_j$ der $P_0, \ldots, P_{n-1}$ ($\alpha_j \in \mathbb{C}$). Das Skalarprodukt von $g + n(n-1)P_n$ mit P_k, $k \in 0, \ldots, n-1$, erlaubt es, α_k zu bestimmen: $\langle g + n(n-1)P_n, P_k \rangle = \langle \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j P_j \rangle, P_k \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \langle P_j, P_k \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \delta_{jk} \frac{2}{2k+1} = \frac{2\alpha_k}{2k+1}$. Die linke Seite können wir noch etwas vereinfachen: $\langle g + n(n-1)P_n, P_k \rangle = \langle g, P_k \rangle + n(n-1)\langle P_n, P_k \rangle = \langle g, P_k \rangle$, da $k < n$. Somit $\alpha_k = \frac{2k+1}{2}\langle g, P_k \rangle = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \partial_x \left[(1 - x^2)\partial_x P_n(x)\right] P_k(x) = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_n(x) \partial_x \left[(1 - x^2)\partial_x P_k(x)\right]$ nach zwei partiellen Integrationen. $\partial_x \left[(1 - x^2)\partial_x P_k(x)\right]$ ist ein Polynom vom Grad $k < n$, also Linearkombination der $P_0, \ldots, P_k$, und da P_n zu all diesen orthogonal ist, ist $\alpha_k = 0$ für jedes $k < n$, d.h. $g + n(n-1)P_n = 0$.

Zu 14: Gibbs-Phänomen: $\sum_{n=-40}^{40} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ sieht so aus:



Eine der beiden Bemerkungen reicht (siehe Text), den Sprung der periodischen Fortsetzung brauchten Sie auch nicht zu erwähnen.