Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein 27.11.2007

6. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 14:

a) Die sogenannten Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sind durch folgende Transformation gegeben:

$$T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi_1) \\ r\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \vdots \\ r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{k-1})\cos(\varphi_k) \\ \vdots \\ r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-1}) \\ r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\sin(\varphi_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

T ist ein C^1–Diffeomorphismus von $(0,\infty) \times (0,\pi)^{n-2} \times (0,2\pi)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} \geq 0,\ x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Jacobi–Determinante $r^{n-1}\sin(\varphi_1)^{n-2}\sin(\varphi_2)^{n-3}\cdots\sin(\varphi_{n-2})$ ist.

Wir schreiben $c_j := \cos(\varphi_j)$, $s_j := \sin(\varphi_j)$ sowie für die Determinante der Jacobimatrix

$$D^n_{r,\varphi_1,\ldots,\varphi_n} := \det\begin{pmatrix} c_1 & -rs_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ s_1c_2 & rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ s_1s_2c_3 & rc_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ s_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & rc_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & & \cdots & -rs_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & rc_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & & \cdots & rs_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Entwickeln nach der 1. Zeile liefert

$$\begin{aligned} D^n_{r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} &= c_1\det\begin{pmatrix} rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ rc_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ rc_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & & \cdots & -rs_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ rc_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & & \cdots & rs_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix} \\ &\quad + rs_1\det\begin{pmatrix} s_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ s_1s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & & \cdots & -rs_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & & \cdots & rs_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Determinanten sind linear in jeder Spalte, also können wir im ersten Summanden rc_1 und im zweiten

Summanden s_1 aus jeweils der ersten Spalte als Vorfaktor vor die Determinante ziehen.

$$\begin{aligned}
D^n_{r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} &= rc_1^2 \det\begin{pmatrix} c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & & \cdots & -rs_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & & \cdots & rs_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix} \\
&\quad + rs_1^2 \det\begin{pmatrix} c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & & \cdots & -rs_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & & \cdots & rs_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= r(c_1^2+s_1^2) \det\begin{pmatrix} c_2 & -rs_1s_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ s_2c_3 & rs_1c_2c_3 & -rs_1s_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & & \cdots & -rs_1s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & & \cdots & rs_1s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nachdem wir auch die s_1 der Spalten 2 bis $n-1$ vor die Determinante gezogen haben, folgt mit $s_1^2+c_1^2=1$

$$\begin{aligned}
D^n_{r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} &= rs_1^{n-2} \det\begin{pmatrix} c_2 & -rs_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ s_2c_3 & rc_2c_3 & -rs_2s_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ s_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} & \cdots & & & \cdots & -rs_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} \\ s_2\cdots s_{n-2}s_{n-1} & \cdots & & & \cdots & rs_2\cdots s_{n-2}c_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= rs_1^{n-2} D^{n-1}_{r,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}},
\end{aligned}$$

wobei $D^{n-1}_{r,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}}$ die Jacobi–Determinante der $n-1$–dimensionalen Transformation ist (mit Variablennamen $\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}$ statt $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-2}$). Iteration liefert $D^n_{r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} = r^{n-2}s_1^{n-2}\cdots s_{n-2}D^2_{r,\varphi_{n-1}}$, und da $D^2_{r,\varphi_{n-1}} = \det\begin{pmatrix} c_{n-1} & -rs_{n-1} \\ s_{n-1} & rc_{n-1}\end{pmatrix} = r$, folgt die Behauptung.

b) Für $n \geq 3$ sei $\lambda_n = \inf_{0\neq u\in X} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|^2_{\frac{2n}{n-2}}}$, wobei X für den Unterraum der $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$–Funktionen u steht, für die es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\|x\|^{(n+\varepsilon-2)/2}u(x)$, $\|x\|^{(n+\varepsilon)/2}\|\nabla u(x)\| \to 0$ für $\|x\| \to \infty$. Man kann zeigen, dass das Infimum von einer positiven rotationssymmetrischen Funktion $u_{\min} \in X$ angenommen wird. Setzen Sie $z = \ln(\|x\|)$ und $\Phi(z) = \|x\|^{(n-2)/2}\,u(\|x\|)$ für rotationssymmetrische $u = u(\|x\|)$ und zeigen Sie $\lambda_n = \pi\left(\frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right)^{2/n} \min_{0\neq\Phi\in Y} F(\Phi)$ für $F(\Phi) = \frac{\|\partial_z\Phi\|_2^2+\frac{(n-2)^2}{4}\|\Phi\|_2^2}{\|\Phi\|^2_{\frac{2n}{n-2}}}$. Y bezeichnet den Vektorraum aller Funktionen, die man aus den rotationsinvarianten Funktionen in X durch obige Transformationen erhält.

Zum Nenner: $\|u\|^{\frac{2n}{n-2}}_{\frac{2n}{n-2}} = \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\ |u(\|x\|)|^{\frac{2n}{n-2}} = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi_1\cdots\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1}\int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^{n-1}\ |u(r)|^{\frac{2n}{n-2}} = C_n\int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^{n-1}\ |u(r)|^{\frac{2n}{n-2}}$ mit den Kugelkoordinaten aus a) und $C_n = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi_1\cdots\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1}1$. Substituiert man $z = \ln(r)$, d.h. $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}r}{r}$, so ist der Nenner $\|u\|^2_{\frac{2n}{n-2}} = C_n^{\frac{n-2}{n}}\left\{\int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^{n-1}\ |u(r)|^{\frac{2n}{n-2}}\right\}^{\frac{n-2}{n}} = C_n^{\frac{n-2}{n}}\left\{\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}z\ |\Phi(z)|^{\frac{2n}{n-2}}\right\}^{\frac{n-2}{n}} = C_n^{1-\frac{2}{n}}\|\Phi\|^2_{\frac{2n}{n-2}}$ mit $\Phi(z) = r(z)^{\frac{n-2}{2}}u(r(z))$.
Für das Volumen der Einheitskugel, d.h. $u = \chi_{B_1(0)}$, wissen wir $\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\ u(x) = \int_{B_1(0)}\mathrm{d}x = m(B_1(0)) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$. Andererseits ist dies in Kugelkoordinaten $= C_n\int_0^1 \mathrm{d}r\ r^{n-1} = \frac{C_n}{n}$. Also $C_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.
Für den Zähler benötigt man den Gradienten rotationssymmetrischer Funktionen $u(r)$, $r = \|x\|$, in Kugelkoordinaten. Mit Kettenregel $\partial_{x_i}u(r) = \frac{\partial r}{\partial x_i}\ \partial_r u(r) = \frac{x_i}{r}\ \partial_r u(r)$, da $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \partial_{x_i}\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} =$

$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}} = \frac{x_i}{r}$. Also $\|\nabla u(r)\|^2 = \sum_i (\partial_{x_i} u)^2 = \sum_i \frac{x_i^2}{r^2}\ (\partial_r u(r))^2 = (\partial_r u(r))^2$. Für $z = \ln(r)$ hat man $\partial_z = \frac{\partial r}{\partial z}\ \partial_r = r\partial_r$. $\Phi(z) = r(z)^{\frac{n-2}{2}} u(r(z))$ ergibt $\|\nabla u\|_2^2 = \int_{R^n} \mathrm{d}x\ \|\nabla u\|^2 = C_n \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^{n-1}\ (\partial_r u)^2 = C_n \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{n-1}\ \left\{\frac{(2-n)}{2} r^{-\frac{n}{2}} \Phi^2(z(r)) + r^{\frac{2-n}{2}} \partial_r \Phi(z(r))\right\}^2 = C_n \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r} \left\{\frac{(2-n)^2}{4} \Phi^2(z(r)) + (r\partial_r \Phi(z(r)))^2\right\} + (2-n) C_n \int_0^\infty \mathrm{d}r\ \Phi\ \partial_r \Phi$. Wegen $\int_0^\infty \mathrm{d}r\ \Phi\ \partial_r \Phi = \frac{1}{2}\ \left[\Phi^2\right]_{r=0}^\infty$ verschwindet der letzte Term, da $\Phi(z(0)) = 0$ (u ist beschränkt in 0, also verschwindet dort $\Phi = r^{\frac{n-2}{2}} u(r)$) und mit $r^{(n+\varepsilon-2)/2} u(r)$ auch Φ im Unendlichen gegen 0 strebt. D.h. $\|\nabla u\|_2^2 = C_n \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}z \left\{\frac{(2-n)^2}{4} \Phi^2(z) + (\partial_z \Phi(z))^2\right\} = C_n \frac{(n-2)^2}{4} \|\Phi\|_2^2 + C_n \|\partial_z \Phi\|_2^2$.

Insgesamt $\lambda_n = \inf_{0 \neq u \in X} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|^2_{\frac{2n}{n-2}}} = C_n^{2/n}\ \min_{0 \neq \Phi \in Y} \frac{\|\partial_z \Phi\|_2^2 + \frac{(n-2)^2}{4} \|\Phi\|_2^2}{\|\Phi\|^2_{\frac{2n}{n-2}}}$.

c) Versieht man Y mit der Norm $\|\Phi\|_{\overline{Y}} = \|\Phi\|_2 + \|\partial_z \Phi\|_2 + \|\Phi\|_{\frac{2n}{n-2}}$, so ist Y nicht vollständig. Mit $\overline{Y}$ bezeichnen wir den Banachraum aller Funktionen, die man als Grenzwert von Cauchyfolgen in Y bezüglich $\|\cdot\|_{\overline{Y}}$ erhält. Zeigen Sie $\min_{0 \neq \Phi \in Y} F(\Phi) = \min_{0 \neq \Phi \in \overline{Y}} F(\Phi)$.

Wegen $Y \subset \overline{Y}$ ist $\min_{0 \neq \Phi \in Y} F(\Phi) \geq \inf_{0 \neq \Phi \in \overline{Y}} F(\Phi)$. Sei $0 \neq \Phi \in \overline{Y}$. Nach Definition von $\overline{Y}$ gibt es eine Folge $\{\Phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in Y, die gegen Φ konvergiert, d.h. $\|\Phi - \Phi_j\|_{\overline{Y}} = \|\Phi - \Phi_j\|_2 + \|\partial_z(\Phi - \Phi_j)\|_2 + \|\Phi - \Phi_j\|_{\frac{2n}{n-2}} \to 0$ für $j \to \infty$. Daher folgt aus $\|\Phi\|_2 - \|\Phi_j - \Phi\|_2 \leq \|\Phi + \Phi_j - \Phi\|_2 = \|\Phi_j\|_2 \leq \|\Phi\|_2 + \|\Phi_j - \Phi\|_2$, dass $\|\Phi_j\|_2 \to \|\Phi\|_2$ für $j \to \infty$. Mit derselben Begründung $\|\Phi_j\|_{\frac{2n}{n-2}} \to \|\Phi\|_{\frac{2n}{n-2}}$ und $\|\partial_z \Phi_j\|_2 \to \|\partial_z \Phi\|_2$. Da $\Phi \neq 0$, also $\|\Phi\|_{\frac{2n}{n-2}} \neq 0$, sagen die Rechenregeln für Folgen $F(\Phi_j) = \frac{\|\partial_z \Phi_j\|_2^2 + \frac{(n-2)^2}{4} \|\Phi_j\|_2^2}{\|\Phi_j\|^2_{\frac{2n}{n-2}}} \to \frac{\|\partial_z \Phi\|_2^2 + \frac{(n-2)^2}{4} \|\Phi\|_2^2}{\|\Phi\|^2_{\frac{2n}{n-2}}} = F(\Phi)$. Daher ist $\inf_{0 \neq \Phi \in \overline{Y}} F(\Phi)$ nicht $< \min_{0 \neq \Phi \in Y} F(\Phi)$, d.h. $\min_{0 \neq \Phi \in Y} F(\Phi) = \inf_{0 \neq \Phi \in \overline{Y}} F(\Phi)$. Ein Minimum $\Phi_{\min} \in Y$ der linken minimiert wegen $\Phi_{\min} \in Y \subset \overline{Y}$ auch die rechte Seite, d.h. das inf ist ein min.

d) $F : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ ist in einer Umgebung des Minimums differenzierbar. Das Minimum wird von den Lösungen $\Phi_{\min} \in \overline{Y}$ der Euler–Lagrange–Gleichung $D_\Phi F(\Phi_{\min}) = 0$ ($\forall \Phi \in Y$) angenommen. Zeigen Sie, dass $\Phi_{\min} \in Y$ diese Gleichung genau dann löst, wenn $-\partial_z^2 \Phi_{\min} + \frac{(n-2)^2}{4} \Phi_{\min} - \lambda \Phi_{\min}^\alpha = 0$ für gewisse (von Ihnen zu bestimmende) $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Finden Sie ein $\Phi_{\min} \in Y$, das zugehörige $u_{\min} \in X$ sowie λ_n.

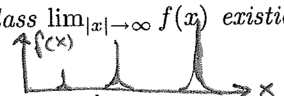
$C_n^{-2/n}\ D_\Phi F(\Phi_{\min}) = C_n^{-2/n}\ \partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0} F(\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi) = \partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0} \frac{\int \mathrm{d}z\ (\partial_z(\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi))^2 + \frac{(n-2)^2}{4} \int \mathrm{d}z\ (\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi)^2}{\left\{\int \mathrm{d}z\ |\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi|^{\frac{2n}{n-2}}\right\}^{\frac{n-2}{n}}}$ für $\Phi \in Y$ nach Definition. Ableitung des Zählers Z_ε: $\partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0} \{\int \mathrm{d}z\ (\partial_z(\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi))^2 + \frac{(n-2)^2}{4} \int \mathrm{d}z\ (\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi)^2\} = \int \mathrm{d}z\ \partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0} \{(\partial_z \Phi_{\min})^2 + 2\varepsilon(\partial_z \Phi_{\min})(\partial_z \Phi) + \varepsilon^2 (\partial_z \Phi)^2\} + \frac{(n-2)^2}{4} \int \mathrm{d}z\ \partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0} \{\Phi_{\min}^2 + 2\varepsilon \Phi_{\min} \Phi + \varepsilon^2 \Phi^2\} = 2 \int \mathrm{d}z\ \{(\partial_z \Phi_{\min})(\partial_z \Phi) + \frac{(n-2)^2}{4} \Phi_{\min} \Phi\} =: Z_0'$. Ersten Term partiell integrieren (Randterme verschwinden wie in b)): $\int \mathrm{d}z\ \{(\partial_z \Phi_{\min})(\partial_z \Phi) = -\int \mathrm{d}z\ \Phi \partial_z^2 \Phi_{\min}$. Für den Nenner N_ε mit Kettenregel und $\Phi_{\min} > 0$ (da laut b) $u_{\min} > 0$): $\partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0} \left\{\int \mathrm{d}z\ |\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi|^{\frac{2n}{n-2}}\right\}^{\frac{n-2}{n}} = \frac{n-2}{n} \left\{\int \mathrm{d}z\ |\Phi_{\min}|^{\frac{2n}{n-2}}\right\}^{\frac{n-2}{n} - 1} \int \mathrm{d}z\ \partial_\varepsilon|_{\varepsilon=0} |\Phi_{\min} + \varepsilon\Phi|^{\frac{2n}{n-2}} = 2 \left\{\int \mathrm{d}z\ \Phi_{\min}^{\frac{2n}{n-2}}\right\}^{\frac{n-2}{n} - 1} \int \mathrm{d}z\ \Phi_{\min}^{\frac{2n}{n-2} - 1} \Phi = N^{-\frac{2}{n-2}} \int \mathrm{d}z\ \Phi_{\min}^{\frac{n+2}{n-2}} \Phi =: N_0'$. Insgesamt mit Quotientenregel also $0 \stackrel{!}{=} C_n^{-2/n}\ D_\Phi F(\Phi_{\min}) = \frac{N_0}{N_0^2} \frac{Z_0' - \frac{Z_0}{N_0} N_0'}{N_0} = \frac{2N_0}{N_0^2} \int \mathrm{d}z\ \Phi \left\{-\partial_z^2 \Phi_{\min} + \frac{(n-2)^2}{4} \Phi_{\min} - \frac{Z_0}{N_0^{1+\frac{2}{n-2}}} \Phi_{\min}^{\frac{n+2}{n-2}}\right\}$.

Da dies für alle $\Phi \in Y = 0$ gilt und $\{\cdots\}$ eine stetige Funktion von z ist, folgt wie in der Übung $\{\cdots\} = 0$, also die DGL aus der Aufgabenstellung mit $\lambda = \frac{Z_0}{N_0^{1+\frac{2}{n-2}}}$, $\alpha = \frac{n+2}{n-2}$. Die Umkehrung gilt auch: $\{\cdots\} = 0$ impliziert $\int \mathrm{d}z\ \Phi\{\cdots\} = 0\ \forall \Phi \in Y$, und partielles Integrieren im ersten Term liefert $D_\Phi F(\Phi_{\min}) = 0$ für $\Phi \in Y$. Wenn Sie $\lambda = \lambda(\Phi_{\min})$ stört, ersetzen Sie $\Phi_{\min}$ durch $\lambda^{\frac{-1}{1-\alpha}} \Phi_{\min}$. Sie erhalten dann die Gleichung mit $\lambda = 1$, und da $F(\lambda^{\frac{-1}{1-\alpha}} \Phi_{\min}) = F(\Phi_{\min})$ bekommen Sie wieder ein Minimum von F. Die Gleichung erinnert an eine Newtonsche Bewegungsgleichung, und es gibt verschiedene Wege, sie zu lösen. Wir integrieren den Energiesatz (siehe z.B. Schulz, 7. von 10 Fällen) mit Randbedingungen (siehe b)) $\Phi_{\min}(\pm\infty) = 0$, $\partial_z \Phi_{\min}(\pm\infty) = 0$: $p(\Phi_{\min}) := \partial_z \Phi_{\min}$, damit $-pp' + \frac{(n-2)^2}{4} \Phi_{\min} - \lambda \Phi_{\min}^\alpha = 0$, also $\frac{1}{2}\ \partial_{\Phi_{\min}} p^2 = \frac{(n-2)^2}{4} \Phi_{\min} - \lambda \Phi_{\min}^\alpha$ oder $p^2 = \frac{(n-2)^2}{4} \Phi_{\min}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1} \Phi_{\min}^{\alpha+1} + C$. Die Randbedingungen liefern $C = 0$. Daher

$\partial_z \Phi_{\min} = \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4}\Phi_{\min}^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1}\Phi_{\min}^{\alpha+1}}$ oder nach Einsetzen von α: $\frac{2}{n-2} \int_{\Phi_0}^{\Phi_{\min}} \frac{d\Phi}{\sqrt{\Phi^2 - \frac{4\lambda}{n(n-2)}\Phi^{\frac{2n}{n-2}}}} = z + \tilde{C}$. Da $\int_{\Phi_0}^{\Phi_{\min}} \frac{d\Phi}{\sqrt{\Phi^2 - \frac{4\lambda}{n(n-2)}\Phi^{\frac{2n}{n-2}}}} = \int_{\Phi_0}^{\Phi_{\min}} \frac{d\Phi}{\Phi\sqrt{1 - \frac{4\lambda}{n(n-2)}\Phi^{\frac{4}{n-2}}}}$ bietet sich die Substitution $\Phi^{\frac{2}{n-2}} = \Psi$, also $\Phi = \Psi^{\frac{n-2}{2}}$ und $d\Phi = \frac{n-2}{2} \Psi^{\frac{n-4}{2}} d\Psi$, an und ergibt $\int_{\Phi_0^{2/(n-2)}}^{\Phi_{\min}^{2/(n-2)}} \frac{d\Psi\ \Psi^{\frac{n-4}{2}}}{\Psi^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{1 - \frac{4\lambda}{n(n-2)}\Psi^2}} = \int_{\Phi_0^{2/(n-2)}}^{\Phi_{\min}^{2/(n-2)}} \frac{d\Psi}{\Psi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\lambda}{n(n-2)}\Psi^2}} = \int_{\beta\Phi_0^{2/(n-2)}}^{\beta\Phi_{\min}^{2/(n-2)}} \frac{d\Psi}{\Psi} \frac{1}{\sqrt{1-\Psi^2}} = [-\mathrm{Arsech}(\Psi)]_{\Psi=\beta\Phi_0^{2/(n-2)}}^{\beta\Phi_{\min}^{2/(n-2)}}$ mit $\beta = \sqrt{\frac{4\lambda}{n(n-2)}}$. Setzt man dies gleich $z + \tilde{C}$, so erhält man $\Phi_{\min}(z) = \frac{\gamma}{\cosh(z-\tilde{D})^{\frac{n-2}{2}}}$, $\gamma = \left(\frac{n(n-2)}{4\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}}$. Rücktransformation auf die alten Variablen: $u(\|x\|) = \frac{2^{(n-2)/2}\gamma}{(1+\tilde{d}\|x\|^2)^{(n-2)/2}}$. Für den Nenner von λ_n erhalten wir mit Aufgabe 10b) $\|u\|^2_{\frac{2n}{n-2}} = C_n^{(n-2)/n}\tilde{d}^{(2-n)/2}\left\{\int_0^\infty dr\ \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n}\right\}^{(n-2)/n} = 2^{(n-2)}\gamma^2\ C_n^{(n-2)/n}\tilde{d}^{(2-n)/2}\left\{\frac{\Gamma(\frac{n}{2})^2}{2\Gamma(n)}\right\}^{(n-2)/n}$. Im Zähler ist $\|\nabla u\|_2^2 = C_n \int_0^\infty dr\ r^{n-1} \left(\partial_r \frac{2^{(n-2)/2}\gamma}{(1+\tilde{d}r^2)^{(n-2)/2}}\right)^2 = C_n 2^{n-2}\gamma^2(n-2)^2\tilde{d}^2 \int_0^\infty dr\ \frac{r^{n+1}}{(1+\tilde{d}r^2)^n} = C_n 2^{n-2}\gamma^2(n-2)^2\tilde{d}^{(2-n)/2}\frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})}{2\Gamma(n)}$ wiederum mit Aufgabe 10b). Mit $\Gamma(\frac{n+2}{2}) = \Gamma(\frac{n}{2}+1) = \frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})$ und $\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1) = (\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n-2}{2})$ ist $\lambda_n = n(n-2)\left(\frac{C_n\Gamma(\frac{n}{2})^2}{2\Gamma(n)}\right)^{2/n} = \pi n(n-2)\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)}\right)^{2/n}$. λ_n ist unabhängig von den unterwegs verwendeten $\lambda, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{d}$, die wir also beliebig wählen können.

Aufgabe 15:

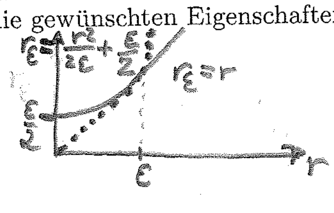
a) f sei auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f, \partial_x f \in L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$ existiert und $= 0$ ist. Gilt dies auch, wenn Sie nur $f \in L^2(\mathbb{R})$ voraussetzen? Idee:



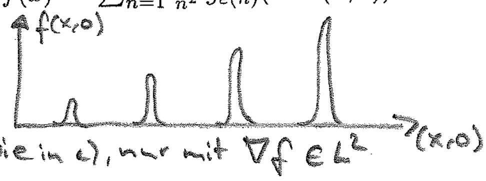
OBdA sei f reellwertig, sonst betrachte Ref und Imf. $(f(x) \pm \partial_x f(x))^2 \geq 0$, also $\int_a^b dx\ \{f(x)^2 + (\partial_x f(x))^2\} \geq 2\int_a^b dx\ |f(x)\ \partial_x f(x)| \geq |2\int_a^b dx\ f(x)\ \partial_x f(x)| = |f(b)^2 - f(a)^2|$ mit $|\int \cdots| \leq \int |\cdots|$ und Hauptsatz. Da $f \in L^2(\mathbb{R})$ folgt (z.B. mit dem Satz von der monotonen Konvergenz) $\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^a f^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2$, d.h. $0 \leq \lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f^2 = \lim_{a\to\infty}\int_a^\infty f^2 = 0$. Analog für $\partial_x f$, und daher wird $|f(b)^2 - f(a)^2|$ nach obigem für große a, b beliebig klein. Nach dem Cauchykonvergenzkriterium $f(x)^2 \to c$. $c = 0$, da $f \in L^2(\mathbb{R})$. Die Aussage gilt nicht für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sei $g_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\ e^{-x^2/(2\delta^2)}$. Dann ist bekanntlich $\int_{\mathbb{R}} dx\ g_\delta(x)^2 < C$ für alle $\delta > 0$ und ein geeignetes C. Betrachte $f(x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2}\ g_{(1/j)^6}(x-j)$. Dann ist $\|f\|_2 \leq \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2}\|g_{(1/j)^6}(x-j)\|_2 \leq \sqrt{C}\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} < \infty$, aber $f(k) = \sum_{j=1}^\infty \frac{j^3}{j^2}e^{-(k-j)^2 j^{12}/2} \geq \frac{k^3}{k^2} \to \infty$ für $k \to \infty$.

b) Konstruieren Sie mit Hilfe von $(0,1) \ni r \mapsto \log\log\frac{2}{r}$ eine stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass zwar $f, \|\nabla f\| \in L^2(\mathbb{R}^2)$, aber die Folge $\{f(n,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ divergiert.

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log\log\frac{2}{\|x\|}$, $g(0) = 0$, ist für $B := B_{1/2}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \frac{1}{2}\}$ in $L^2(B)$: In Polarkoordinaten $\int_B |g|^2 = \int_{-\pi}^\pi d\varphi \int_0^{1/2} dr\ r\ g(r)^2 < 2\pi C m(B) < \infty$, da $r\ g(r)^2$ auf $(0, \frac{1}{2}]$ stetig ist, für $r \to 0$ verschwindet (z.B. mit l'Hospital) und somit $r\ g(r)^2 < C$ für ein gewisses $C > 0$ gilt. $\|\nabla g\|^2 = (\partial_r g(r))^2$ gilt wie in 13b) und $\int_B \|\nabla g\|^2 = \int_{-\pi}^\pi d\varphi \int_0^{1/2} dr\ r(\partial_r g(r))^2 = 2\pi\int_0^{1/2}\frac{dr}{r(\log(\frac{2}{r}))^2} = 2\pi\int_0^{1/4}\frac{dr}{r(\log(r))^2} = 2\pi\left[\frac{-1}{\log r}\right]_{r=0}^{1/4} < \infty$. Also $g, \|\nabla g\| \in L^2(B)$, aber g ist in 0 nicht stetig. *Idee*: Mache g auf $B_\varepsilon(0)$ zu einer glatten Funktion $\tilde{g}_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Betrachte dann die für $n \to \infty$ unbeschränkte Funktion, die man durch Verschieben von $\tilde{g}_{\varepsilon(n)}$ um $(n, 0)$ bekommt für $\varepsilon(n) \to 0$. *Details:* Zuerst schneiden wir g außerhalb einer Kugel ab und setzen durch 0 auf $\mathbb{R}^2$ fort. Z.B. tut es $\tilde{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = \cos(\pi\|x\|)^2\ g(\|x\|)$ für $x \in B$ und $= 0$ sonst. Weil $\tilde{g}(r)$ für $r = \frac{1}{2}$ eine doppelte Nullstelle hat, ist $\tilde{g}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar. Nun modifizieren wir $\tilde{g}$, so dass die Funktion auch in 0 stetig differenzierbar ist. $r_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $r_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\varepsilon}r^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ für $r < \varepsilon$, $r_\varepsilon(r) = r$ sonst, z.B. ist stetig differenzierbar und durch $\frac{\varepsilon}{2}$ von unten beschränkt, so dass es das $\|x\|$ in den Logarithmen in g ersetzen kann: Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ erhält man eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{g}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}_\varepsilon(x) = \cos(\pi\|x\|)^2\ \log\log\frac{2}{r_\varepsilon(\|x\|)}$ für $x \in B$ und 0 sonst. Nach Konstruktion sind $|\tilde{g}_\varepsilon| \leq g$, $\|\nabla\tilde{g}_\varepsilon\| \leq \|\nabla g\|$ auf B, so dass $\int_{\mathbb{R}^2}|\tilde{g}_\varepsilon|^2 \leq \int_B g^2 < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^2}\|\nabla\tilde{g}_\varepsilon\|^2 \leq \int_B \|\nabla g\|^2 < \infty$. Weil $\tilde{g}_\varepsilon(0) \to \infty$ für $\varepsilon \to 0$, hat $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\tilde{g}_{\varepsilon(n)}(x - (n,0))$ mit $\log\log\frac{4}{\varepsilon(n)} = n^3$ die gewünschten Eigenschaften.



Idee:



wie in a), nur mit $\nabla f \in L^2$