INSTITUT FÜR ANALYSIS
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein 20.11.2007

5. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 11:

Betrachten Sie $\Pi_n = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \forall k\, u_k > 0$ *und* $u_k + u_{k+1} < \frac{\pi}{2}$ *sowie* $u_n + u_1 < \frac{\pi}{2}\}$ *(*$n > 1$*).*

a) Zeigen Sie, dass die Transformation $x_1 = \frac{\sin(u_1)}{\cos(u_2)}$, $x_2 = \frac{\sin(u_2)}{\cos(u_3)}$, $\ldots, x_n = \frac{\sin(u_n)}{\cos(u_1)}$ *das Polyeder* Π_n C^1*–diffeomorph auf* $(0,1)^n$ *abbildet. Was ist die zugehörige Jacobi-Determinante?*

Um die Notation zu vereinfachen, identifizieren wir u_{n+1} mit u_1.
- Zeige, dass obige Transformation eine stetig differenzierbare Funktion von Π_n *nach* $(0,1)^n$ *liefert:* Sind die $u_k > 0$ und $u_k + u_{k+1} < \frac{\pi}{2}$, so sind alle $u_k \in (0, \frac{\pi}{2})$ und daher auch alle $\sin(u_k), \cos(u_k) > 0$. Aus der strengen Monotonie des Sinus auf $(0, \frac{\pi}{2})$ folgt $\sin(u_k) < \sin(\frac{\pi}{2} - u_{k+1}) = \cos(u_{k+1})$. Insgesamt gibt es also zu beliebigem $(u_1, \ldots, u_n) \in \Pi_n$ ein eindeutig bestimmtes $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $0 < x_k = \frac{\sin(u_k)}{\cos(u_{k+1})} < 1$ für alle k. Die Abbildung $(u_1, \ldots, u_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ ist nach den Rechenregeln stetig differenzierbar von Π_n nach $(0,1)^n$, weil dies für sin und cos gilt und die Nenner auf Π_n nicht verschwinden.
Umgekehrt zeigen wir gleich mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass zu vorgegebenem $(x_1, \ldots, x_n) \in (0,1)^n$ genau ein $(u_1, \ldots, u_n) \in (0, \frac{\pi}{2})^n$ die Gleichungen $x_k = \frac{\sin(u_k)}{\cos(u_{k+1})}$ für alle k erfüllt.
- Zeige, dass dann sogar $(u_1, \ldots, u_n) \in \Pi_n$ *folgt, d.h. dass* $u_k + u_{k+1} < \frac{\pi}{2}$*:* Angenommen $u_k + u_{k+1} \geq \frac{\pi}{2}$ für ein k. Dann folgt aus der Monotonie des Sinus $\cos(u_{k+1}) = \sin(\frac{\pi}{2} - u_{k+1}) \leq \sin(u_k)$, also $1 = \frac{\cos(u_{k+1})}{\cos(u_{k+1})} \leq \frac{\sin(u_k)}{\cos(u_{k+1})} = x_k < 1$. Widerspruch! Also $u_k + u_{k+1} < \frac{\pi}{2}$.
- Zeige, wie angekündigt, dass $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (0,1)^n$ *genau ein* $(u_1, \ldots, u_n) \in (0, \frac{\pi}{2})^n$ *existiert, dass auf* $(x_1, \ldots, x_n)$ *abgebildet wird:* Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in (0,1)^n$. Wir folgen dem Hinweis und definieren $f, f_x : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_x(u) = \arcsin(x \cos(u))$ $(x \in (0,1))$, $f = f_{x_1} \circ \cdots \circ f_{x_n}$. *Zwischenschritt: f ist eine Kontraktion.* Es gilt $|\partial_u f_x(u)| = \left| -\frac{x \sin(u)}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2(u)}} \right| = \frac{x \sin(u)}{\sqrt{1 - x^2 + x^2 \sin^2(u)}}$. Die rechte Seite ist eine streng monoton wachsende Funktion von $\sin(u)$, insbesondere kleiner gleich dem Wert bei $\sin(u) = 1$, d.h. x. Also $|\partial_u f_x(u)| \leq x < 1$, und nach der Kettenregel gibt es auch ein $0 \leq c < 1$, so dass $|\partial_u f(u)| \leq c < 1$. Daher $|f(u) - f(v)| \leq \sup_{z \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\partial_u f(z)||u - v| < c|u - v|$. f ist also eine Kontraktion. *Zwischenschritt: Es gibt genau eine Lösung* $u_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ *der Gleichung* $u = f(u)$. Weil $[0, \frac{\pi}{2}]$ kompakt ist, gibt es laut Banachschem Fixpunktsatz genau eine Lösung $u_1 \in [0, 2\pi]$. u_1 liegt sogar in $(0, \frac{\pi}{2})$: Für $x \in (0,1)$ und $u \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist $x \cos(u) \in (0,1)$ und daher $f_x(u) = \arcsin(x \cos(u)) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Daher bildet auch f als Verkettung der f_{x_k} das Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ ab. Insbesondere ist $0 \neq f(0)$. Wegen $f_{x_n}(\frac{\pi}{2}) = \arcsin(0) = 0$ ist auch $f(\frac{\pi}{2}) \in (0, \frac{\pi}{2})$, und speziell $\frac{\pi}{2} \neq f(\frac{\pi}{2})$. *Letzter Schritt: Bestimme zu* u_1 *eindeutig* $u_2, \ldots, u_n$*, so dass* $(u_1, \ldots, u_n)$ *auf* $(x_1, \ldots, x_n)$ *abgebildet wird:* Gegebene u_1 und die x_k bestimmen die $u_2, \ldots, u_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ eindeutig via $u_n = f_{x_n}(u_1)$, $u_{n-1} = f_{x_{n-1}}(u_n), \ldots, u_2 = f_{x_2}(u_3)$. Wegen $u_1 = f(u_1) = (f_{x_1} \circ \cdots \circ f_{x_n})(u_1)$ gilt dann tatsächlich auch $x_1 = \frac{\sin(u_1)}{\cos(u_2)}$, und die Gleichungen $x_k = \frac{\sin(u_k)}{\cos(u_{k+1})}$ sind für alle k erfüllt.
Zusammenfassung: Die Transformation $(u_1, \ldots, u_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ ist bijektiv von Π_n nach $(0,1)^n$!
- Jacobideterminante: Die von Null verschiedenen partiellen Ableitungen $\partial_{u_j} x_i$ sind $\frac{\cos(u_i)}{\cos(u_{i+1})}$ für $i = j$ und $\frac{\sin(u_i)\sin(u_{i+1})}{\cos^2(u_{i+1})}$ für $j \equiv i + 1 \bmod n$. Die Entwicklung der Determinante $\det(\partial_{u_j} x_i)$ nach der ersten Zeile liefert nur zwei nicht–verschwindende Terme: Das Produkt der Diagonalterme $\prod_{i=1}^n \frac{\cos(u_i)}{\cos(u_{i+1})} = 1$ und $(-1)^{n-1}$ mal das Produkt $\prod_{i=1}^n \frac{\sin(u_i)\sin(u_{i+1})}{\cos^2(u_{i+1})} = \prod_{i=1}^n x_i^2$ der Terme mit $j \equiv i + 1 \bmod n$. Die Jacobi–Determinante ist also $1 + (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i^2$.
- Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion: Weil die Determinante in keinem Punkt verschwindet, sagt der Satz über inverse Funktionen (Satz 4.5 aus Kapitel VI der Analysis II), dass auch die Abbildung $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (u_1, \ldots, u_n)$ in jedem Punkt von $(0,1)^n$ stetig differenzierbar ist.

Insgesamt: Die Abbildung ist also bijektiv und ebenso wie ihre Umkehrfunktion stetig differenzierbar, somit ein C^1–Diffeomorphismus.

b) Führen Sie das Volumen von Π_n auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{(2k+1)^n}$ zurück und überlegen Sie sich, dass $\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}$ für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine rationale Zahl ist (die Sie nicht explizit ausrechnen müssen!).

- *Wende Trafoformel auf den (genauer die Inverse des) C^1–Diffeomeorphismus aus a) an:* Π_n ist beschränkt, daher $m(\Pi_n) < \infty$, somit $\chi_{\Pi_n} \geq 0$ integrierbar, und wir dürfen den Transformationssatz auf $\int_{\Pi_n} \mathrm{d}(u_1, \dots, u_n)$ anwenden. Mit a) $m(\Pi_n) = \int_{\Pi_n} \mathrm{d}(u_1, \dots, u_n) = \int_{(0,1)^n} \frac{\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)}{1+(-1)^{n-1}x_1^2\cdots x_n^2}$.
- *Nenner entwickeln* $m(\Pi_n) = \int_{(0,1)^n} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{nk}(x_1 \cdots x_n)^{2k}$.
- *Reihe und Integral vertauschen:* Schreibe $f_j(x_1, \dots, x_n) := \sum_{k=0}^{j}(-1)^{nk}(x_1 \cdots x_n)^{2k}$. Ist n gerade, so ist $f_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{j}(x_1 \cdots x_n)^{2k}$, und da alle Summanden ≥ 0 sind, gilt $0 \leq f_0(x_1, \dots, x_n) \leq f_1(x_1, \dots, x_n) \leq f_2(x_1, \dots, x_n) \leq \cdots$ für alle $x_1, \dots, x_n$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz darf man also $\lim_{j\to\infty}$ und $\int_{(0,1)^n} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)$ vertauschen. Der Fall mit ungeradem n ist etwas komplizierter: In diesem Fall ist $f_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k(x_1 \cdots x_n)^{2k} = \frac{1-(-1)^{j+1}(x_1\cdots x_n)^{2j+2}}{1+(x_1\cdots x_n)^2}$ (geometrische Summe), also $|f_j(x_1, \dots, x_n)| \leq \frac{2}{1+(x_1\cdots x_n)^2}$ und die rechte Seite ist unabhängig von j und wegen $m((0, 1)^n) < \infty$ als beschränkte, messbare Funktion über $(0, 1)^n$ integrierbar (2.11a). Weil $\lim_{j\to\infty} f_j(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1+(x_1\cdots x_n)^2}$ in ganz $(0, 1)^n$ existiert, darf man nach dem Satz von der dominierten Konvergenz auch hier Grenzwert und Integral vertauschen.
- *Integral mit Fubini ausrechnen:* $(x_1 \cdots x_n)^{2k}$ ist auf $(0, 1)^n$ beschränkt und messbar, also wegen $m((0, 1)^n) < \infty$ integrierbar (2.11a). Fubini: $\int_{(0,1)^n} \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)(x_1 \cdots x_n)^{2k} = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \dots \int_0^1 \mathrm{d}x_n\, x_1^{2k} \cdots x_n^{2k} = \frac{1}{(2k+1)^n}$. Insgesamt haben wir also $m(\Pi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{(2k+1)^n}$.
- *Zusammenhang mit ζ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gerade:* Durch Umordnen der absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{(2k+1)^n}$: $m(\Pi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{(2k+1)^n} = (1 - 2^{-n}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = (1 - 2^{-n})\zeta(n)$. Setzt man $E_n := \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \forall k\, u_k > 0 \text{ und } u_k + u_{k+1} < 1\}$ so gilt nach Transformationssatz $m(\Pi_n) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n m(E_n) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \int_{E_n} \mathrm{d}(u_1, \dots, u_n)$. E_n liegt zwischen stückweise geraden Seitenflächen mit rationalen Eckpunkten. Daher ist nach Hinschreiben der Integrationsgrenzen an die $\int \mathrm{d}u_j$ klar, dass $m(E_n)$ als iteriertes Integral von Polynomen mit rationalen Koeffizienten, deren Stammfunktionen ausgewertet an den Integrationsgrenzen wieder solche Polynome sind, selbt ein Polynom in den Koordinaten der Eckpunkte mit rationalen Koeffizienten ist. Damit $m(E_n) \in \mathbb{Q}$, und für gerade $n > 0$ gilt tatsächlich $\zeta(n) = \frac{m(\Pi_n)}{1-2^{-n}} = \frac{\pi^n}{2^n-1} m(E_n) \in \pi^n\mathbb{Q}$.

Aufgabe 12:

Es seien $m_i, a_i, k_i, E > 0$ und $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{p_i^2}{2m_i} + \left|\frac{q_i}{a_i}\right|^{k_i} \right\}$. $V_{n,E}$ bezeichne das $2n$–dimensionale Volumen von $\Omega_{n,E} = \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} : H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) < E\}$.

a) Zeigen Sie $V_{1,E} = \sqrt{8m_1}a_1 E^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{k_1})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{k_1})}$ mit Hilfe von Aufgabe 10b), z.B. indem Sie $\Omega_{1,E} \cap \mathbb{R}^2_{>0}$ auf $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2_{>0} : u + v < 1\}$ transformieren.

Aus der Definition folgt mit $u = \frac{p_1^2}{2m_1E}$, $v = \left|\frac{q_1}{a_1E^{1/k_1}}\right|^{k_1}$, d.h. $\mathrm{d}(p_1, q_1) = (\sqrt{\frac{m_1E}{2}}\, u^{-\frac{1}{2}})\, (\frac{a_1}{k_1}E^{\frac{1}{k_1}} v^{\frac{1}{k_1}-1})\, \mathrm{d}(u, v)$,

$$V_{1,E} = \int_{\frac{p_1^2}{2m_1}+\left|\frac{q_1}{a_1}\right|^{k_1}\leq E} \mathrm{d}(p_1, q_1) = 4 \int_{\substack{\frac{p_1^2}{2m_1}+\left|\frac{q_1}{a_1}\right|^{k_1}\leq E \\ p_1,q_1\geq 0}} \mathrm{d}(p_1, q_1) = \frac{\sqrt{8m_1}a_1E^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_1}}}{k_1} \int_{\substack{u+v\leq 1 \\ u,v\geq 0}} \mathrm{d}(u, v)\, u^{-\frac{1}{2}}\, v^{\frac{1}{k_1}-1}.$$

Der Transformationssatz darf angewendet werden, weil $\Omega_{1,E}$ beschränkt ist, daher $V_{1,E} < \infty$ und somit $\chi_{\Omega_{1,E}} \geq 0$ integrierbar. Er garantiert, dass auch der Integrand auf der rechten Seite integrierbar ist, so dass Fubini angewendet werden darf: $\int_{\substack{u+v\leq 1 \\ u,v\geq 0}} \mathrm{d}(u, v)\, u^{-\frac{1}{2}}\, v^{\frac{1}{k_1}-1} = \int_0^1 \mathrm{d}u\, u^{-\frac{1}{2}} \int_0^{1-u} \mathrm{d}v\, v^{\frac{1}{k_1}-1} =$

$k_1 \int_0^1 \mathrm{d}u\ u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{k_1}} = k_1\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{k_1})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{k_1})}$ folgt mit Aufgabe 10b).

b) Berechnen Sie wie in a) das Volumen $V_{n,E}$ mit Hilfe der Gammafunktion. Zeigen Sie, dass der Quotient $\frac{V_{n,E}-V_{n,E-\Delta}}{V_{n,E}}$ für beliebiges $0<\Delta<E$ und $n\to\infty$ gegen 1 strebt. In hoher Dimension konzentrieren sich also Volumen und Entropie $S = k_B \ln \frac{V_{n,E}}{V^0}$ in einer dünnen Schale um die Oberfläche (V^0 = „Volumen eines Zustands“).

In n Dimensionen ergibt sich mit derselben Begründung wie in a) mit $u_j = \frac{p_j^2}{2m_jE}$, $v_j = \left|\frac{q_j}{a_jE^{1/k_j}}\right|^{k_j}$, dass

$$V_{n,E} = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{8m_i}a_iE^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_i}}}{k_i}\right\} \int_{\substack{\sum_j u_j+v_j\le 1\\ u_j,v_j\ge 0}} \mathrm{d}(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)\ u_1^{-\frac{1}{2}}\ v_1^{\frac{1}{k_1}-1}\cdots u_n^{-\frac{1}{2}}\ v_n^{\frac{1}{k_n}-1},$$

sowie $\int_{\substack{\sum_j u_j+v_j\le 1\\ u_j,v_j\ge 0}} \mathrm{d}(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n) = \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^{1-u_1} \mathrm{d}v_1\ \cdots\ \int_0^{1-u_1-\dots-v_{n-1}} \mathrm{d}u_n \int_0^{1-u_1-\dots-u_n} \mathrm{d}v_n$ wie in a) nach Fubini.

Als erstes das v_n–Integral: $\int_0^{1-u_1-\dots-u_n} \mathrm{d}v_n\ v_n^{\frac{1}{k_n}-1} = k_n(1-u_1-\dots-u_n)^{\frac{1}{k_n}}$. Für die u_n– und v_n–Integrale also $\int_0^{1-u_1-\dots-v_{n-1}} \mathrm{d}u_n\ u_n^{-\frac{1}{2}} \int_0^{1-u_1-\dots-u_n} \mathrm{d}v_n\ v_n^{\frac{1}{k_n}-1} = k_n \int_0^{1-u_1-\dots-v_{n-1}} \mathrm{d}u_n\ u_n^{-\frac{1}{2}}(1-u_1-\dots-u_n)^{\frac{1}{k_n}} = k_n(1-u_1-\dots-v_{n-1})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_n}} \int_0^1 \mathrm{d}u_n\ u_n^{-\frac{1}{2}}(1-u_n)^{\frac{1}{k_n}} = k_n(1-u_1-\dots-v_{n-1})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_n}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{k_n})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{k_n})}$ nach Substitution $u_n \mapsto (1-u_1-\dots-v_{n-1})u_n$ und mit Aufgabe 10b). Als nächstes führt man auf dieselbe Weise die u_{n-1}– und v_{n-1}–Integrale auf Gammafunktionen zurück etc. und erhält schließlich

$$V_{n,E} = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{8m_i}a_iE^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_i}}}{k_i}\right\}\ k_n\ \Gamma(\tfrac{1}{2})^n\ \frac{\Gamma(\frac{1}{k_1})\cdots\Gamma(\frac{1}{k_{n-1}})\Gamma(1+\frac{1}{k_n})}{\Gamma(1+\frac{n}{2}+\frac{1}{k_1}+\dots+\frac{1}{k_n})}.$$

(Anwenden von $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ aus c) liefert den in den k_j symmetrischeren Ausdruck

$$V_{n,E} = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{8m_i}a_iE^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_i}}}{k_i}\right\}\ \Gamma(\tfrac{1}{2})^n\ \frac{\Gamma(\frac{1}{k_1})\cdots\Gamma(\frac{1}{k_n})}{\Gamma(1+\frac{n}{2}+\frac{1}{k_1}+\dots+\frac{1}{k_n})}\ .\ )$$

Für $0<\Delta<E$ ist $\frac{V_{n,E}-V_{n,E-\Delta}}{V_{n,E}} = \frac{E^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_1}+\dots+\frac{1}{2}+\frac{1}{k_n}}-(E-\Delta)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_1}+\dots+\frac{1}{2}+\frac{1}{k_n}}}{E^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_1}+\dots+\frac{1}{2}+\frac{1}{k_n}}} = 1-(1-\frac{\Delta}{E})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{k_1}+\dots+\frac{1}{2}+\frac{1}{k_n}}$. Der zweite Term verschwindet für $n\to\infty$, da $0<1-\frac{\Delta}{E}<1$.

Aufgabe 13:

Finden Sie mit den Methoden aus Aufgabe 12 das Volumen $\omega_{n,R}$ der n–dimensionalen Kugel vom Radius R. Eliminieren Sie mit Hilfe der bekannten Werte $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ sowie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(x>0)$ die Gammafunktionen aus Ihrem Ergebnis. Kommt für $n = 1,\ 2,\ 3$ auch wirklich $2R$, πR^2 bzw. $\frac{4}{3}\pi R^3$ heraus?

Aus den angegebenen Eigenschaften der Gammafunktion folgt $\Gamma(k+1) = k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = k!$ für $k\in\mathbb{N}_{>0}$, so dass $\omega_{2k,R} = \frac{\pi^kR^{2k}}{k!}$ für gerade $n = 2k$ aus der Formel für $V_{k,E}$ mit $E = R$, $a_i = 1$, $m_i = \frac{1}{2}$ und $k_i = 2$ folgt. Für $n = 2$ gibt dies tatsächlich $\omega_{2k,R} = \pi R^2$. In ungerader Dimension $n = 2k-1$ berechnet man auf dieselbe Weise wie in b) $\omega_{2k-1,R} = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{2k-2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1+\frac{2k-1}{2})}R^{2k-1}$. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ liefert im Zähler $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ und im Nenner $\Gamma(1+\frac{2k-1}{2}) = \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$, so dass $\omega_{2k-1,R} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{2k-1}}{\Gamma(1+\frac{2k-1}{2})}R^{2k-1} = \frac{2^k\pi^{k-1}R^{2k-1}}{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdots 3\cdot 1}$. $k = 1$ und 2 geben wie erwartet $2R$ und $\frac{4}{3}\pi R^3$.