Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein 13.11.2007

4. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Die Messbarkeit aller auf diesem Übungsblatt vorkommenden Funktionen sollte Ihnen klar sein und muss auch in Zukunft nicht mehr ausdrücklich überprüft werden.

Aufgabe 9:

a) Zum Zeitpunkt 0 herrscht im Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Temperatur $f(x)$, f stetig und beschränkt. Für spätere Zeiten $t > 0$ ist die Temperatur laut RdP durch $T : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)$, gegeben. Beweisen Sie, dass $T(t, x)$ zweimal stetig differenzierbar ist und tatsächlich die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t T = \partial_x^2 T$ mit Anfangsbedingung $\lim_{t\to 0^+} T(t, x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Gilt auch $\lim_{t\to 0^-} T(t, x) = f(x)$, falls man $\sqrt{t}$ geeignet definiert?

Sei $g : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t, x, y) = e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)$. Da $e^{-y^2} \in L^1(\mathbb{R})$ und f beschränkt ist, ist für festes $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ auch $y \mapsto g(t, x, y)$ integrierbar und $T(t, x)$ wohldefiniert. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt mit $\overline{U} \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Die Ableitungen $\partial_t^j \partial_x^k g(t, x, y)$ sind Summen von Termen der Form $t^{-m} (x-y)^l\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)$, $l, m \geq 0$ und insbesondere stetig auf U. Da t^{-1} auf U beschränkt ist, gilt $|\partial_t^j \partial_x^k g(t, x, y)| \leq M_{jk} |P_{jk}(x - y)|\, e^{cxy-dy^2} f(y)$ für geeignete $c, d, M_{jk} > 0$ und ein geeignetes Polynom P_{jk}. Da $|x|$ auf U beschränkt ist, finden wir ein Polynom Q_{jk} mit $|P_{jk}(x - y)| \leq Q_{jk}(|y|)$, indem wir jeden Term in $P_{jk}(x - y)$ durch seinen Betrag und $|x|$ durch eine obere Schranke abschätzen. Ebenso ist $e^{cxy} \leq e^{\tilde{c}|y|}$ mit $\tilde{c} = c \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|$. Insgesamt also $|\partial_t^j \partial_x^k g(t, x, y)| \leq M_{jk} \sup_{z\in\mathbb{R}} f(z)\; Q_{jk}(|y|)\, e^{\tilde{c}|y|-dy^2}$, und die Funktion auf der rechten Seite ist integrierbar (da ≥ 0 und uneigentlich Riemann–integrierbar) und unabhängig von (t, x). Nach Vorlesung existiert daher die Ableitung $\partial_t^j \partial_x^k T(t, x)$ auf U, ist dort stetig und darf durch Differenzieren unter dem Integral berechnet werden. Dies liefert $\partial_t T = \partial_x^2 T = \frac{1}{8\sqrt{\pi t^5}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, \big((x - y)^2 - 2t\big)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)$.

Zur Anfangsbedingung: $|T(t, x)-f(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (f(y) - f(x))\right|$ mit dem Hinweis $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$. Mit der Dreiecksungleichung $|\int \cdots| \leq \int |\cdots|$ (2.18a) und der Substitution $y \mapsto 2\sqrt{t}y + x$ folgt $\lim_{t\to 0^+} |T(t, x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, e^{-y^2} |f(x + 2\sqrt{t}y) - f(x)|$. Der Integrand ist nach oben durch die integrierbare und von (t, x) unabhängige Funktion $2 \sup_{z\in\mathbb{R}} |f(z)|\, e^{-y^2}$ beschränkt. Da f stetig ist, gilt $\lim_{t\to 0^+} |f(x + 2\sqrt{t}y) - f(x)| = 0$, so dass man nach dem Satz von der dominierten Konvergenz bzw. dem zu Parameterintegralen $\int$ und lim vertauschen darf und auf der rechten Seite 0 erhält. Also $\lim_{t\to 0^+} T(t, x) = f(x)$.

$\lim_{t\to 0^-} T(t, x)$ existiert im Allgemeinen nicht, da z.B. für $f \equiv 1$ der Integrand $e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)$ für kein $t < 0$ integrierbar ist. Wärmeleitung ist nicht reversibel.

b) Ein Stern S ruht im Weltall $\mathbb{R}^3$ und zieht mit seinem Gravitationspotential $V(x) = -\int_S \mathrm{d}y\, \frac{\varrho(y)}{\|x-y\|}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus S$, umherfliegende Astronauten an. Natürlich ist S kompakt und die Dichte $\varrho : S \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass V auf $\mathbb{R}^3 \setminus S$ zweimal stetig differenzierbar ist, dort $\Delta V = 0$ erfüllt und $\lim_{r\to\infty} rV(re) = -\int_S \mathrm{d}y\, \varrho(y)$ für beliebiges $e \in \mathbb{R}^3$ mit $\|e\| = 1$ gilt. Weit weg von S unterscheidet sich $V(x)$ also kaum noch vom Gravitationspotential $-\frac{M}{\|x\|}$ eines Massenpunktes mit $M = \int_S \mathrm{d}y\, \varrho(y)$.

Für $f : (\mathbb{R}^3\setminus S)\times S \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{\varrho(y)}{\|x-y\|}$, ist nach 2.18 $y \mapsto f(x, y)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^3\setminus S$ integrierbar auf S: $y \mapsto \|x-y\|^{-1}$ ist auf dem Kompaktum S stetig und daher durch eine Konstante M_x beschränkt, so dass $|f(x, y)| \leq M_x|\varrho(y)| \in L^1(S)$. Zur Differenzierbarkeit: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $\overline{U} \subset \mathbb{R}^3 \setminus S$. $x \mapsto \|x - y\|^{-1}$ ist für festes $y \in S$ zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus S$. Wähle $C > 0$, so dass $\|x - y\| > C$ für

alle $x \in U$ und $y \in S$. Für $(x,y) \in U \times S$ schätzt man ab $|\partial_{x_i} f(x,y)| = |\varrho(y) \frac{x_i - y_i}{\|x-y\|^3}| \leq C^{-2} |\varrho(y)|$, $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x,y) = |\varrho(y)| \left| \frac{3(x_i-y_i)(x_j-y_j) - \delta_{ij}\|x-y\|^2}{\|x-y\|^5} \right| \leq 4C^{-3}|\varrho(y)|$, so dass auch die x–Ableitungen von f über S integrierbar sind. Nach den Sätzen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Parameterintegralen ist daher $V(x) = -\int_S \mathrm{d}y\, f(x,y)$ zweimal stetig differenzierbar auf U und $\Delta V(x) = -\sum_i \int_S \mathrm{d}y\, \partial_{x_i}^2 f(x,y)$. Ausrechnen der Ableitungen $\partial_{x_i}^2 f(x,y)$ liefert leicht $\Delta V = 0$ auf U. Da U beliebig war, gelten die Aussagen auch auf $\mathbb{R}^3 \setminus S$.
Als kompakte Menge im $\mathbb{R}^3$ ist $S \subset B_R$ für ein großes R. Sei $0 < s \leq \frac{1}{2R}$. Gesucht ist der Grenzwert von $\frac{1}{s} V(\frac{e}{s}) = -\int_S \mathrm{d}y\, \frac{\varrho(y)}{\|e - sy\|} =: W_e(s)$ für $s \to 0$. Der Integrand ist für beliebiges $y \in S$ eine stetige Funktion von $s \in [0, \frac{1}{2R}]$ und im Betrag kleiner als die integrierbare, nicht von s abhängende Funktion $2|\varrho(y)|$. Nach Vorlesung ist $W_e(s)$ somit stetig in $s \in [0, \frac{1}{2R}]$, insbesondere existiert $\lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s} V(\frac{e}{s})$ und ist gleich $W_e(0) = -\int_S \mathrm{d}y\, \varrho(y)$.

Aufgabe 10:

a) Archimedes sagt: „Wenn in ein rechtstehendes Prisma [d.h. in einen Quader] mit quadratischen Grundflächen ein Zylinder eingeschrieben wird, dessen Grundflächen in den gegenstehenden Quadraten liegen und dessen krumme Oberfläche die 4 übrigen Rechtecke berührt, und durch den Mittelpunkt des Kreises, der Grundfläche des Zylinders ist, und eine Seite des gegenstehenden Quadrats eine Ebene gelegt wird, so wird der Körper, der durch diese Ebene [vom Zylinder] abgeschnitten wird, [dem Volumen nach] 1/6 des ganzen Prismas sein." Da Ihnen Autoritätsgläubigkeit schon als Wort viel zu lang ist, überprüfen Sie das bitte mit modernen Methoden.

Wir betrachten den Quader $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{a}{2} \leq x, y \leq \frac{a}{2}, 0 \leq z \leq h\}$ mit Volumen ha^2. Der eingeschriebene Zylinder ist dann $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2, 0 \leq z \leq h\}$. Gesucht ist das Volumen der Teilmenge G von Z, die unterhalb der Ebene $z = \frac{2h}{a}x$ liegt. Mit anderen Worten:

$$m(G) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}(x,y,z)\, \chi_G(x,y,z) = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y \int_{x=-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}}^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}} \mathrm{d}x \int_{z=0}^{\frac{2h}{a}x} \mathrm{d}z\, 1$$

Fubini durfte man anwenden, da G beschränkt, also $m(G) < \infty$, also $\chi_G \geq 0$ nach Definition integrierbar.

$$\int_{x=-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}}^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}} \mathrm{d}x \int_{z=0}^{\frac{2h}{a}x} \mathrm{d}z\, 1 = \int_{x=-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}}^{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2}} \mathrm{d}x\, \frac{2h}{a}\, x = \frac{2h}{a} \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 \right),$$

und somit

$$m(G) = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y\, \frac{2h}{a} \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 \right) = \frac{2h}{a} \left(\frac{a}{2}\right)^2 a - \frac{2h}{a} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{ha^2}{4} - \frac{ha^2}{12} = \frac{1}{6} ha^2.$$

Archimedes konnte dies auch ohne Integrale.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Fubini und der Substitutionsformel für Riemann-Integrale für $w, z, \Delta > 0$:

$$\int_0^1 \mathrm{d}t\, t^{w-1}(1-t)^{z-1} = 2\Delta^z \int_0^\infty \mathrm{d}p\, \frac{p^{2w-1}}{(p^2 + \Delta)^{w+z}} = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)}.$$

Mit $s = \frac{t}{1-t}$, d.h. $t = \frac{s}{1+s}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{(1+s)^2}$, wird das linke Integral zu $\int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{s^{w-1}}{(s+1)^{w+z}}$. Die erste Gleichung folgt für $\Delta = 1$ nun mit der Substitution $s = p^2$. Für beliebiges $\Delta > 0$ ersetzt man p durch $\frac{p}{\sqrt{\Delta}}$.
Wir nennen die linke Seite der obigen Gleichungen $B(w,z)$ (dies ist die Eulersche Betafunktion). Nach Substitutionsformel gilt: $(1+s)^{-(w+z)}\, \Gamma(w+z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{w+z-1}\, e^{-(1+s)t}$, $s > -1$, $w, z > 0$, und somit $\Gamma(w+z)\, B(w,z) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, s^{w-1} \left\{ \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{w+z-1}\, e^{-(1+s)t} \right\}$. Weil der Integrand ≥ 0 und $\Gamma(w+z)\, B(w,z) < \infty$ ist, erlaubt es Fubini, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Folglich gilt $\Gamma(w+z)\, B(w,z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \left\{ \int_0^\infty \mathrm{d}s\, s^{w-1}\, e^{-ts} \right\} t^{w+z-1}\, e^{-t}$. Das innere Integral ist $= \Gamma(w)\, t^{-w}$. Insgesamt also $\Gamma(w+z)\, B(w,z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \Gamma(w)\, t^{z-1}\, e^{-t} = \Gamma(w)\, \Gamma(z)$.