Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein 6.11.2007

3. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 6:
a) Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so auch das Innere B° und der Abschluss $\overline{B}$ von B und $m(B) = m(B^\circ) = m(\overline{B})$.

1. Teil wahr, 2. Teil falsch: B° und $\overline{B}$ sind als offene bzw. abgeschlossene Mengen messbar. Für $B = \mathbb{Q}$ ist jedoch $0 = m(B) \neq m(\overline{B}) = m(\mathbb{R}) = \infty$. Für $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $\infty = m(B) \neq m(B^\circ) = m(\emptyset) = 0$.

b) Sind $f, g : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und stimmen auf einer dichten Teilmenge überein, so ist $\int_I f = \int_I g$.

Falsch: Für $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$, $g = \chi_{[0,1]}$ ist $0 = \int_0^1 f \neq \int_0^1 g = 1$, aber $f = g$ auf den rationalen Zahlen, welche wiederum dicht in $[0, 1]$ sind.

c) Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = n$ falls $\frac{2n}{4n^2-1} < x \leq \frac{1}{2n-1}$ und $f(x) = -n$ falls $\frac{1}{2n+1} < x \leq \frac{2n}{4n^2-1}$ ($n \in \mathbb{N}_{>0}$). Dann ist $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^\infty (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}]$ aber $\int_0^1 f \neq \sum_{n=1}^\infty \int_{1/(2n+1)}^{1/(2n-1)} f$.

Wahr: Falls f messbar ist (ist es tatsächlich), so ist $\int_0^1 f = \int_0^1 \max\{f, 0\} - \int_0^1 \max\{-f, 0\}$, wenn nicht beide Terme auf der rechten Seite ∞ sind. Wegen $\int_0^1 \max\{f, 0\} = \int_0^1 \max\{-f, 0\} = \sum_n \frac{n}{4n^2-1} = \infty$, sind beide Terme ∞ und $\int_0^1 f$ nicht definiert (Wäre f nicht messbar, so wäre $\int_0^1 f$ erst recht nicht definiert). Andererseits ist $\int_{1/(2n+1)}^{1/(2n-1)} f = 0$ für alle n, also auch $\sum_{n=1}^\infty \int_{1/(2n+1)}^{1/(2n-1)} f = 0$.

d) $\frac{\sin(x)}{x}$ ist auf $[0, \infty)$ nicht integrierbar.

Wahr: Wäre $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ integrierbar, so auch $|f|$ (2.18a). Für $|f|$ gilt jedoch $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} dx \frac{|\sin(x)|}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} dx\, |\sin(x)| = \frac{2}{(k+1)\pi}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wäre $|f|$ integrierbar, so hätte man $\int_0^\infty dx \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} dx \frac{|\sin(x)|}{x} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)\pi} = \infty$. Widerspruch. $|f|$ kann nicht integrierbar sein.

e) f ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.

Falsch: Sei $f = \chi_N - \chi_{[0,1]\setminus N}$, $N \subset [0, 1]$ nicht messbar, so ist f nicht messbar, da $\{x : f(x) > 0\} = N$ nicht messbar ist. Damit ist f auch nicht integrierbar. $|f| = |\chi_N - \chi_{[0,1]\setminus N}| = 1$ dagegen ist als konstante Funktion integrierbar.

f) Es seien $N \subset [0, 1]$ nicht messbar, C Cantors Diskontinuum und $f_1, f_2, f_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_1 = \chi_C$, $f_2 = \chi_N$, $f_3(x) = \sqrt{\tan(\frac{\pi x}{2})}$. Dann sind die Produkte $f_i f_j f_k$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, messbar und über $[0, 1]$ integrierbar.

Teilweise richtig/teilweise falsch: Ist einer der Faktoren $= f_1$, so verschwindet das Produkt außerhalb einer Nullmenge und ist daher messbar und integrierbar mit Integral $= 0$. Besteht das Produkt aus Faktoren, die f_2, aber nicht f_1 enthalten, so ist die Menge der $x \in [0, 1]$, für die das Produkt > 0 ist, gleich N oder $N\setminus\{0\}$. N ist nicht messbar, und da sonst $N = (N\setminus\{0\}) \cup \{0\}$, falls $0 \in N$, als Vereinigung messbarer Mengen messbar wäre, kann $N \setminus \{0\}$ ebenfalls nicht messbar sein. Deshalb ist das Produkt nicht messbar, und somit auch nicht integrierbar. Bleibt als letztes der Fall $f_3^3(x) = \tan^{3/2}(\frac{\pi x}{2})$. Diese Funktion ist messbar, da die Mengen $\{x \in [0, 1] : f_3^3(x) > c\}$ Intervalle, und insbesondere messbar, sind. Da $\sin(\frac{\pi x}{2})$ und $\frac{(1-x)^{3/2}}{\cos^{3/2}(\frac{\pi x}{2})}$ auf jedem Intervall $[a, 1]$, $a > 0$, von unten beschränkt sind, gilt $0 < C \leq (1-x)^{3/2} \tan^{3/2}(\frac{\pi x}{2})$

auf $[a,1]$. Es folgt $\int_0^1 f_3^3 \geq \int_a^1 f_3^3 \geq C \int_a^1 (1-x)^{-3/2} \geq C \int_a^{1-\varepsilon}(1-x)^{-3/2}$ für $\varepsilon \in (0, 1-a)$. Die rechte Seite $\int_a^{1-\varepsilon}(1-x)^{-3/2}$ berechnet man als Riemann–Integral und sieht, dass sie für $\varepsilon \to 0^+$ gegen ∞ geht. Daher ist $\int_0^1 f_3^3 = \infty$ und f_3^3 auf $[0,1]$ nicht integrierbar.

g) Seien $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Dann ist $\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = 1$.

Falsch: Auch wenn man $\int_0^\infty f_n = 1$ für alle n nachrechnet, gilt doch punktweise $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, so dass $\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Um den Satz von der dominierten Konvergenz anzuwenden, benötigt man eine integrierbare Majorante $|f_n| \leq g$, die man hier nicht findet.

Aufgabe 7:
Ähnlich wie bei der Konstruktion des Cantorschen Diskontinuums werden aus dem gleichseitigen, abgeschlossenen Dreieck $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ nacheinander kleinere, offene und gleichseitige Teildreiecke aus der Mitte der verbleibenden Dreiecke herausgenommen: Wie auf der Rückseite angedeutet, zuerst das mittige $D_{1,1}$, dann $D_{2,1}, D_{2,2}, D_{2,3}$, dann $D_{3,1}, \ldots, D_{3,9}$, usw. Die Restmenge $S = D \setminus \bigcup_{j,k} D_{j,k}$ heißt Sierpinski-Dreieck. *Nun sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = 2x + j$ falls $(x,y) \in D_{j,k}$ und 0 falls $(x,y) \in S$. Beweisen Sie, dass f integrierbar ist, und bestimmen Sie $\int_D \mathrm{d}m\, f$.*

$S = D \setminus \bigcup_{j,k} D_{j,k} = \bigcap_j D \setminus \bigcup_{k=1}^{3^{j-1}} D_{j,k}$ ist als Durchschnitt von ineinander enthaltenen Vereinigungen von Dreiecken messbar, und nach 2. Stundenübung ist $m(S) = \lim_{j\to\infty} m(\bigcap_{k=1}^{3^{j-1}} D \setminus D_{j,k}) = \lim_{j\to\infty} (\frac{3}{4})^j\, m(D) = 0$. D.h. S ist eine Nullmenge. Wir schreiben $f = f_1 + f_2$ mit $f_1(x,y) = 2x$ bzw. $f_2(x,y) = j$ falls $(x,y) \in D_{j,k}$ und $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$ falls $(x,y) \in S$. Die Mengen $\{f_j(x,y) > c\}$ sind für $j = 1$ abzählbare Vereinigungen von Punkten, Dreiecken und Fünfecken, für $j = 2$ abzählbare Vereinigungen von Dreiecken, jeweils also messbar. Damit sind auch f_1, f_2 und $f = f_1 + f_2$ messbar. f_1 ist als beschränkte Funktion nach Lemma 2.11a auf D integrierbar, da $m(D) < \infty$. Weil S Nullmenge ist, erhält man mit elementarer Geometrie für den ersten Summanden $\int_{D\setminus S} 2x = \int_D 2x =$ Volumen unter dem Graph von 2x $= \frac{\sqrt{3}}{4}$. Wegen $f_2 \geq 0$ folgt die Integrierbarkeit von f_2 sofern $\int_D f_2 < \infty$. Wie in der Stundenübung gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz $\int_D f_2 = \sum_{j,k} \int_{D_{j,k}} j = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{3} \sum_{j=1}^\infty j \left(\frac{3}{4}\right)^j = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{4} \sum_{j=1}^\infty j \left(\frac{3}{4}\right)^{j-1} = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = \sqrt{3} < \infty$. Unterwegs haben wir die Reihe $\sum_{n=1}^\infty n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ (für $|x| < 1$) aus Analysis I zitiert. Also sind f_1, f_2 und somit auch $f = f_1 + f_2$ integrierbar, und $\int_D f = \int_D f_1 + \int_D f_2 = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Aufgabe 8:
Seit der Planckschen Strahlungsformel wissen Sie, dass im thermischen Gleichgewicht die Photonen oder anderen absorbierbaren Bosonen mit Energien E zwischen E_1 und E_2 zusammen die Energie

$$\int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}E\, g(E)\, \frac{E}{e^{\frac{E}{T}} - 1}$$

enthalten. Dabei bezeichnet $g(E)$ die Zustandsdichte, mit der die Energieniveaus verteilt sind und für die in n Dimensionen in der Regel $g(E) = E^{s-1}$ für $s = \frac{n}{2}$ oder n gilt. Man beweise, dass sich in diesem Fall die gesamte Energie der Bosonen mit $E > 0$ zu $T^{s+1}\Gamma(s+1)\zeta(s+1)$ ergibt, wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t} t^{x-1}$ $(x > 0)$ die Gammafunktion und $\zeta(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^x}$ $(x > 1)$ die Riemannsche Zetafunktion sind.

Es ist $\int_0^\infty \mathrm{d}E\, \frac{E^s}{e^{\frac{E}{T}}-1} = \int_0^\infty \mathrm{d}E\, E^s \frac{e^{-\frac{E}{T}}}{1-e^{-\frac{E}{T}}} = \int_0^\infty \mathrm{d}E\, \lim_{k\to\infty} E^s \sum_{j=0}^k e^{-(j+1)\frac{E}{T}}$. Die Intervalle $\{E : e^{-(j+1)\frac{E}{T}} > c\}$ sind messbar, so dass auch $e^{-(j+1)\frac{E}{T}}$ für alle j, T messbar ist. $f_k(E) := E^s \sum_{j=0}^k e^{-(j+1)\frac{E}{T}}$ ist als Summe messbarer Funktionen messbar, und da die Summanden ≥ 0 sind, gilt $0 \leq f_1(E) \leq f_2(E) \leq f_3(E) \leq \cdots$ für jedes E. Aus Satz 2.20 (monotone Konvergenz) folgt $\int_0^\infty \mathrm{d}E\, \lim_{k\to\infty} f_k(E) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{d}E\, f_k(E) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{d}E\, E^s \sum_{j=0}^k e^{-(j+1)\frac{E}{T}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^k \int_0^\infty \mathrm{d}E\, E^s\, e^{-(j+1)\frac{E}{T}}$. Wegen $\int_0^\infty \mathrm{d}E\, E^s\, e^{-(j+1)\frac{E}{T}} = T^{s+1} \frac{1}{(j+1)^{s+1}} \int_0^\infty \mathrm{d}E\, E^s\, e^{-E} = T^{s+1} \frac{1}{(j+1)^{s+1}} \Gamma(s+1)$ gilt also $\int_0^\infty \mathrm{d}E\, \frac{E^s}{e^{\frac{E}{T}}-1} = \sum_{j=0}^\infty T^{s+1} \frac{1}{(j+1)^{s+1}} \Gamma(s+1) = T^{s+1}\Gamma(s+1)\zeta(s+1)$.