Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein 30.10.2007

2. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 3:

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f : X \to X$ eine maßerhaltende Abbildung, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ und $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Man zeige, dass dann μ–fast jeder Punkt in A unter Anwendung von f unendlich oft nach A zurückkehrt, d.h. mit $f^1 = f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}_{>1})$ gilt $\mu(\{x \in A : \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : f^n(x) \notin A\}) = 0$.

Sei $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} f^{-k}(A)$. Dann ist $A_i \subset A_j$ und $A_i = f^{j-i}(A_j)$ (jeweils für $j \leq i$), und daher $\mu(A_i) = \mu(A_j)$ für $i, j \geq 0$. Da $A \subset A_0$, folgt $A \backslash A_n \subset A_0 \backslash A_n$, so dass (beachte $A_n \subset A_0$) $\mu(A \backslash A_n) \leq \mu(A_0 \backslash A_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n) = 0$ für $n > 0$. Somit $\mu(A \setminus A_n) = 0$ und daher $\mu(A \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \setminus A_n)) = 0$. $A \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ist genau die oben angegebene Menge.

Aufgabe 4:

a) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $A \subset \mathbb{R}^2$ definiert man das Diracsche Punktmaß $\delta_{x,y}$ durch $\delta_{x,y}(A) = 1$, falls $(x, y) \in A$, und 0 sonst. Sei $\varepsilon > 0$. Überprüfen Sie, ob $\mu_\varepsilon = \varepsilon^2 \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \delta_{\varepsilon i, \varepsilon j}$ ein Maß auf der σ–Algebra aller Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ definiert. Sei $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq R\}$ die Kreisscheibe um 0 mit Radius R. Beweisen Sie $\mu_\varepsilon(B_R) - \pi R^2 = O(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$ ($\mu_\varepsilon(B_R) - \pi R^2 = o(\varepsilon)$ gilt auch, ist aber etwas schwieriger). Zeigen Sie zusätzlich $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R} \mathrm{d}\mu_\varepsilon\, f = \int_{B_R} \mathrm{d}m\, f$, falls f auf B_R stetig ist.

$\delta_{x,y}$ ist ein Maß: $\delta_{x,y} \geq 0$ gilt nach Definition. Sind $A_j \subset \mathbb{R}^2$ paarweise disjunkt, so ist $\delta_{x,y}(\bigcup_j A_j) = \sum_j \delta_{x,y}(A_j)$, da beide Seiten $= 1$ sind, falls $(x, y) \in A_j$ für ein j, und $= 0$ sonst. Auch μ_ε ist ein Maß: $\mu_\varepsilon \geq 0$ folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von $\delta_{x,y}$. Die σ–Additivität ergibt sich aus dem Doppelreihensatz (Satz 8 in Kapitel II, Abschnitt 7 in Eschers „Analysis I"–Vorlesung): Da die Summanden ≥ 0 sind, garantiert dieser für $A \subset \mathbb{R}^2$ die Unabhängigkeit der Doppelreihe $\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \delta_{\varepsilon i, \varepsilon j}(A)$ von der Reihenfolge der Summanden. Seien $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Aufzählung von $(\varepsilon\mathbb{Z})^2$ und $A_j \subset \mathbb{R}^2$ paarweise disjunkt. Dann ist $\mu_\varepsilon(\bigcup_j A_j) = \varepsilon^2 \sum_k \delta_{x_k, y_k}(\bigcup_j A_j) = \varepsilon^2 \sum_k \sum_j \delta_{x_k, y_k}(A_j) = \sum_j \varepsilon^2 \sum_k \delta_{x_k, y_k}(A_j) = \sum_j \mu_\varepsilon(A_j)$ nach σ–Additivität von δ_{x_k, y_k} und einer weiteren Anwendung des Doppelreihensatzes.
Wir zeigen $\mu_1(B_r) - \pi r^2 = O(r)$ für $r \to \infty$. Die Aussage folgt dann, indem man $r = R/\varepsilon$ setzt. Jedem Gitterpunkt $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ ordnen wir das Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^2$ mit der südwestlichen Ecke (i, j) zu. Ist $i^2 + j^2 \leq r^2$, so ist das zugehörige Einheitsquadrat im Kreis mit Radius $r + \sqrt{2}$ enthalten, also $\mu_1(B_r) \leq \pi(r + \sqrt{2})^2$ für $r \geq 0$. Wenn das Einheitsquadrat zu (i, j) den Kreis vom Radius $r - \sqrt{2}$ berührt, so gilt $i^2 + j^2 \leq r^2$, so dass $\mu_1(B_r) \geq \pi(r - \sqrt{2})^2$. Insgesamt folgt $|\mu_1(B_r) - \pi r^2| \leq 2\pi(1 + \sqrt{2}r)$ für $r \geq 0$.
Diesmal ohne Reskalierungen: Sei $Q^\varepsilon_{ij} = \{(x, y) \in B_R : \varepsilon i \leq x \leq \varepsilon(i + 1), \varepsilon j \leq y \leq \varepsilon(j + 1)\}$. Ist f auf B_R stetig, so gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x, y) - f(\varepsilon i, \varepsilon j)| < \frac{\eta}{\pi R^2}$ für alle $\varepsilon < \delta$ und $(x, y), (\varepsilon i, \varepsilon j) \in Q^\varepsilon_{ij}$. Da f und der Betrag $|\cdot|$ stetig und $m(B_R) < \infty$, sind f, konstante Funktionen sowie $|f - f(\varepsilon i, \varepsilon j)|$ nach Lemma 2.4 messbar und nach Lemma 2.11a in $L^1(B_R)$, erst recht also in $L^1(Q^\varepsilon_{ij})$. Obige Abschätzung und Lemma 2.11c geben $\int_{Q^\varepsilon_{ij}} \mathrm{d}m\, |f - f(\varepsilon i, \varepsilon j)| < \frac{\eta\, m(Q^\varepsilon_{ij})}{\pi R^2}$ sofern $Q^\varepsilon_{ij} \cap \partial B_R = \emptyset$. Setzt man $f(x, y) = 0$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R$, so folgt aus der Dreiecksungleichung bzw. Lemma 2.18a $|\int_{B_R} \mathrm{d}m\, f - \varepsilon^2 \sum_{(\varepsilon i, \varepsilon j) \in B_R} f(\varepsilon i, \varepsilon j)| \leq \sum_{i,j:\ Q^\varepsilon_{ij} \cap \partial B_R = \emptyset} \int_{Q^\varepsilon_{ij}} \mathrm{d}m\, |f - f(\varepsilon i, \varepsilon j)| + \sum_{i,j:\ Q^\varepsilon_{ij} \cap \partial B_R \neq \emptyset} \left\{ \int_{Q^\varepsilon_{ij}} \mathrm{d}m\, |f| + \varepsilon^2 |f(\varepsilon i, \varepsilon j)| \right\}$. Der erste Term ist nach obigem $< \sum_{i,j} \frac{\eta\, m(Q^\varepsilon_{ij})}{\pi R^2} = \eta$. Die Summanden im zweiten Term lassen sich durch $2\varepsilon^2 \sup_{B_R} |f|$ abschätzen, und $\sum_{i,j:\ Q^\varepsilon_{ij} \cap \partial B_R \neq \emptyset} \varepsilon^2$ ist die Fläche einer aus Quadraten der Kantenlänge ε zusammengesetzten Menge $\subset A := \{(x, y) : \|(x, y)\| \in$

$[R-\sqrt{2}\varepsilon, R+\sqrt{2}\varepsilon]\}$. Daher ist der zweite Term kleiner als $2\sup_{B_R}|f|$ mal $m(A) < (2\sqrt{2}\varepsilon) \times (2\pi(R+\sqrt{2}\varepsilon)) =: C(\varepsilon)$. Insgesamt $|\int_{B_R} \mathrm{d}m\, f - \varepsilon^2 \sum_{(\varepsilon i,\varepsilon j)\in B_R} f(\varepsilon i,\varepsilon j)| < \eta + 2C(\varepsilon)\sup_{B_R}|f|$ für alle $\eta > 0$ und $\varepsilon < \delta$. $C(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ gibt nun $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_R} \mathrm{d}\mu_\varepsilon\, f = \int_{B_R} \mathrm{d}m\, f$.
Kürzer geht es mit dem Satz 2.21 von der dominierten Konvergenz: Setzt man wieder $f = 0$ außerhalb von B_R und definiert $f_\varepsilon(x,y) = f(\varepsilon i, \varepsilon j)$ für $\varepsilon i \leq x < \varepsilon(i+1)$, $\varepsilon j \leq y < \varepsilon(j+1)$, so ist $f_\varepsilon \in L^1$ (wie oben oder nach 2.18b) und konvergiert für jede Nullfolge $\{\varepsilon_k\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ punktweise gegen f auf $B_{R+\nu}$ $(\nu > 0)$. Da $|f|$ beschränkt ist und die gleich einer oberen Schranke gewählte konstante Funktion in $L^1(B_{R+\nu})$ liegt, folgt mit Satz 2.21: $\int_{B_R} \mathrm{d}m\, f = \int_{B_{R+\nu}} \mathrm{d}m\, f = \lim_k \int_{B_{R+\nu}} \mathrm{d}m\ f_{\varepsilon_k}$. Ausrechnen des Integrals über die einfache Funktion f_{ε_k} gibt für die rechte Seite $\lim_k \varepsilon_k^2 \sum_{(\varepsilon_k i,\varepsilon_k j)\in B_{R+\nu}} f(\varepsilon_k i, \varepsilon_k j)$ für alle $\nu > 0$ und jede Nullfolge $\{\varepsilon_k\}$. Damit folgt die Behauptung.

b) Eine dünne Membran sei am Rand des Quadrats $0 \leq x, y \leq L$ fest eingespannt. Ihre Schwingungsmoden $A\sin(k_x x)\sin(k_y y)$ sind durch die Wellenvektoren (k_x, k_y) bestimmt. Welche Werte können k_x und k_y annehmen? Wie verhält sich die Anzahl der (linear unabhängigen) Moden mit $\|(k_x,k_y)\| \leq k$ für $k \to \infty$ (L fest) bzw. für $L \to \infty$ (k fest)?

Da die Membran am Rand eingespannt ist, muss $\sin(k_x x)\sin(k_y y)$ dort verschwinden. Also $k_x, k_y \in \frac{\pi}{L}\mathbb{N}_{>0}$. Die Anzahl der Moden ist nach a) ein Viertel der Kreisfläche (mal $\varepsilon^{-2} = \frac{L^2}{\pi^2}$) minus der $2\,\frac{L}{\pi}\,2k-1$ nichtvorhandenen Moden mit $k_x = 0$ oder $k_y = 0$. Also $= \frac{1}{4}\left(\frac{L^2}{\pi^2}\pi k^2 - 2\,\frac{L}{\pi}\,2k + o(L) \text{ bzw. } o(k)\right) = \frac{L^2k^2}{4\pi} - \frac{Lk}{\pi} + o(L)$ bzw. $o(k)$. Die Aufgabenstellung hat von Ihnen natürlich nur die Bestimmung bis auf $O(L)$ bzw. $O(k)$ verlangt. Auch in n Dimensionen und für relativ allgemeine Gebiete gilt, dass der führende Term in k nur vom n–dimensionalen Volumen der Membran und der zweite nur vom $(n-1)$–dimensionalen Volumen des Randes sowie den Randbedingungen abhängt.

Aufgabe 5:

a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz–stetig, d.h. es gebe ein $L > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so ist auch das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

L bezeichne die Lipschitz–Konstante von f, und es sei $C_n \geq \sqrt{n}L$ fest. Zu zeigen ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Überdeckung der Menge $f(N)$ aus abzählbar vielen offenen Elementarmengen B_j, so dass $\sum_{j=1}^\infty m(B_j) < \varepsilon$.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da N als Nullmenge vorausgesetzt ist, gibt es eine Überdeckung von N aus abzählbar vielen offenen n–dimensionalen Intervallen I_j und $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) < \frac{\varepsilon}{2C_n^n}$. Indem man jedes der I_j durch eine I_j überdeckende Vereinigung offener n–dimensionaler Würfel (d.h. offene Intervalle mit gleichlangen Seiten) approximiert, findet man eine Überdeckung von N durch abzählbar viele offene Würfel Q_j der Kantenlängen l_j mit $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) < \frac{\varepsilon}{C_n^n}$. Es sei $A_j := f(Q_j)$. Dann überdecken die Mengen A_j die Bildmenge $f(N)$. Da f Lipschitz–stetig ist und $\|x_1 - x_2\| < \sqrt{n}l_j$ für alle $x_1, x_2 \in Q_j$, haben je zwei Punkte in A_j einen Abstand $< L\sqrt{n}l_j$. Daher sind die A_j in offenen Würfeln B_j der Kantenlängen $C_n l_j$ enthalten, und $f(N) \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_j$. Man bekommt: $\sum_{j=1}^\infty\ m(B_j) \leq C_n^n\ \sum_{j=1}^\infty m(Q_j) < \varepsilon$.

b) Sei $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ der Graph einer Lipschitz–stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass G messbar ist, und berechnen Sie $\mu(G)$.

Nach Stundenübung ist $D = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge. Mit f ist auch $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(x,y) = (x, f(x))$, Lipschitz–stetig und $G = \tilde{f}(D)$ nach a) somit ebenfalls eine Nullmenge.