INSTITUT FÜR ANALYSIS
UNIVERSITÄT HANNOVER
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

22.1.2007

12. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 33:

Sei $\varphi : T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Karte, $M = \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$ die dadurch parametrisierte Fläche und f auf M integrierbar. Überlegen Sie sich $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ und zeigen Sie damit $\int_M \mathrm{d}S\ f = \int_T \mathrm{d}(x,y)\ f(\varphi(x,y))\ \|\partial_x\varphi(x,y) \times \partial_y\varphi(x,y)\|$.

Bezeichnet α den Winkel zwischen $a, b \in \mathbb{R}^3$, so gilt bekanntlich $\cos(\alpha) = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}$ und $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2(\alpha) = \|a\|^2\|b\|^2(1 - \cos^2(\alpha)) = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2$.
Nach Definition ist $\int_M \mathrm{d}S\ f = \int_T \mathrm{d}(x,y)\ f(\varphi(x,y))\sqrt{\det(\partial\varphi(x,y)^T\partial\varphi(x,y))}$. In der ersten (zweiten) Spalte von $\partial\varphi$ steht $\partial_x\varphi$ $(\partial_y\varphi)$, so dass $\partial\varphi^T\partial\varphi = \begin{pmatrix} \|\partial_x\varphi\|^2 & \partial_y\varphi \cdot \partial_x\varphi \\ \partial_x\varphi \cdot \partial_y\varphi & \|\partial_y\varphi\|^2 \end{pmatrix}$, und nach obiger Rechnung somit $\det(\partial\varphi^T\partial\varphi) = \|\partial_x\varphi\|^2\|\partial_y\varphi\|^2 - (\partial_x\varphi \cdot \partial_y\varphi)^2 = \|\partial_x\varphi \times \partial_y\varphi\|^2$.

Aufgabe 34:

Sei $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $\varrho(x) = \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right)$ für $\|x\| < 1$ und $= 0$ sonst. Für $\varepsilon > 0$ und $c = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho$ bezeichne $\varrho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^n}\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$. Für $V \subset \mathbb{R}^n$ sei $V^\varepsilon = \{x \in V : \operatorname{dist}(x, \partial V) > \varepsilon\}$.

a) Sei $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar mit $0 \le \alpha \le 1$ und $\tilde\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y)\alpha(y)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie:

1. *$\tilde\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $0 \le \tilde\alpha \le 1$.*
2. *Ist $\alpha(x) = 0$ für $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\tilde\alpha(x) = 0$ für $x \in V^\varepsilon$.*

$\tilde\alpha \in C^\infty$: Sei $T \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte $f : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \varrho_\varepsilon(x-y)\alpha(y)$. $y \mapsto f(x,y)$ ist als beschränkte messbare Funktion, die nur auf der beschränkten Menge $\{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < \varepsilon\}$ ungleich Null ist, nach Lemma 2.11a integrierbar. $x \mapsto \partial_{x_j} f(x,y) = (\partial_{x_j}\varrho_\varepsilon(x-y))\alpha(y)$ ist für alle y stetig. $0 \le \alpha \le 1$ impliziert $|\partial_{x_j} f(x,y)| \le |\partial_{x_j}\varrho_\varepsilon(x-y)|$. Die rechte Seite ist nur für $\|x-y\| < \varepsilon$ von Null verschieden. Sei also $\tilde T = \{y \in \mathbb{R}^n : \partial_{x_j}\varrho_\varepsilon(x-y) \ne 0 \text{ für ein } x \in T\}$. Bezeichnet C das Maximum von $|\partial_{x_j}\varrho_\varepsilon|$, so ist daher $|\partial_{x_j} f(x,y)| \le |\partial_{x_j}\varrho_\varepsilon(x-y)| \le C\chi_{\tilde T}(y)$, und die rechte Seite ist wie oben integrierbar. Aus den Sätzen 2.22/2.23 folgt $\tilde\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ f(x,y) \in C^1(T)$, und wiederholtes Anwenden des obigen Arguments auf die Ableitungen von $\tilde\alpha$ liefert $\tilde\alpha \in C^\infty(T)$. Da $T \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, ist sogar $\tilde\alpha \in C^\infty(T)$.
$0 \le \tilde\alpha \le 1$: Da $\alpha, \varrho_\varepsilon \ge 0$ ist $\tilde\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y)\alpha(y) \ge 0$. Wegen $\alpha \le 1$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y) = 1$ ist $\tilde\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y)\alpha(y) \le \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y) = 1$.
$\tilde\alpha(x) = 0$ für $x \in V^\varepsilon$: Ist $x \in V^\varepsilon$, so ist $B := \{y : \|y-x\| < \varepsilon\} \subset V$ und $\alpha = 0$ auf B. Daher $\tilde\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y)\alpha(y) = \int_B \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y)\alpha(y) = 0$.

b) Wie in (7.15) sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_j : j = 1, \ldots, N\}$ eine Überdeckung von K durch offene Mengen. $\varepsilon > 0$ sei so klein, dass sogar $K \subset \bigcup_j U_j^{3\varepsilon}$. Weiterhin bezeichne $\{\alpha_j : j = 1, \ldots, N\}$ eine den *U_j^ε* untergeordnete Zerlegung der 1 für *$\bigcup_j U_j^{2\varepsilon}$, also alle $\alpha_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien messbar mit $0 \le \alpha_j \le 1$, $\alpha_j(x) = 0$ für $x \notin U_j^\varepsilon$ und $\sum_j \alpha_j = 1$ auf $\bigcup_j U_j^{2\varepsilon}$.*
Zeigen Sie: $\{\tilde\alpha_j : j = 1, \ldots, N\}$ ist eine den U_j untergeordnete Zerlegung der 1 für K *aus C^∞–Funktionen.*

Nach Teil a) ist nur noch $\sum_j \tilde\alpha_j = 1$ auf K zu zeigen. Für $x \in K \subset \bigcup_j U_j^{3\varepsilon}$ ist $B := \{y : \|y-x\| < \varepsilon\} \subset \bigcup_j U_j^{2\varepsilon}$ und somit $\sum_j \alpha_j(y) = 1$ für alle $y \in B$. Also $\sum_j \tilde\alpha_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y) \sum_j \alpha_j(y) =$

$\int_B \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y) = 1$ da $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varrho_\varepsilon(x-y) = 1$.

Aufgabe 35:

a) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $f, g:\ A \to \mathbb{R}$ stetige, auf dem Inneren von A zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die beiden Greenschen Formeln

$$1. \int_A \mathrm{d}x\ \{f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g\} = \int_{\partial A} \mathrm{d}S\ \nu \cdot (f\ \nabla g), \quad 2. \int_A \mathrm{d}x\ \{f\Delta g - g\Delta f\} = \int_{\partial A} \mathrm{d}S\ \nu \cdot \{f\nabla g - g\nabla f\}.$$

Der Gaußsche Integralsatz lautet bekanntlich $\int_A \mathrm{d}x\ \mathrm{div}F = \int_{\partial A} \mathrm{d}S\ \nu \cdot F$. Setzt man $F = f\nabla g$, so ist $\mathrm{div}F = f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$ und daher $\int_A \mathrm{d}x\ \{f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g\} = \int_A \mathrm{d}x\ \mathrm{div}F = \int_{\partial A} \mathrm{d}S\ \nu \cdot F = \int_{\partial A} \mathrm{d}S\ \nu \cdot (f\ \nabla g)$. Nennt man in der 1. Formel f g und g f und zieht dies von der 1. Formel ab, so erhält man die 2. Formel.

b) Sei f wie in a), $\nu \cdot \nabla f = 0$ auf ∂A und $\Delta f \geq 0$ in A. Zeigen Sie, dass aus a) $\nabla f = 0$ folgt. Was bedeutet dies physikalisch, wenn Sie sich f als elektrostatisches Potential vorstellen?

$g = 1$ in der 2. Formel ergibt $-\int_A \mathrm{d}x\ \Delta f = 0$. Weil der Integrand ≥ 0 ist, ist (nach Lemma 2.17b) $\Delta f = 0$ fast überall. Also auch $\int_A \mathrm{d}x\ f\Delta f = 0$, da der Integrand fast überall $= 0$ ist. Aus der ersten Formel mit $f = g$ bekommt man $\int_A \mathrm{d}x\ (\nabla f)^2 = 0$, also (wiederum nach Lemma 2.17 b) $\nabla f = 0$ fast überall. Als stetige Funktion verschwindet ∇f daher auf ganz A. Wenn also aus A kein elektrisches Feld $E = -\nabla f$ herauskommt ($\nu \cdot E = 0$ auf ∂A), dann können in A nicht nur Ladungen ϱ vom selben Vorzeichen sitzen ($\Delta f = -\mathrm{div}\ E = -\varrho$. Die Aussage gilt auch falls $\Delta f \leq 0$.).

c) Im glatt berandeten Kompaktum $A \subset \mathbb{R}^3$ seien zahlreiche Elektronen festgebunden: Ladungsdichte $\varrho : A \to \mathbb{R}$ (stetig). Voodoo Physics *bietet Ihnen eine außerhalb von A aufzustellende Maschine an, die zu beliebig vorgegebenem stetigen $E_0 : \partial A \to \mathbb{R}$ ein stetiges, im Innern zweimal stetig differenzierbares elektrisches Feld $E : A \to \mathbb{R}$ erzeugt, welches auf ∂A gleich E_0 ist. Würden Sie für den Apparat Geld ausgeben?*

Nach Maxwellgleichung $\mathrm{div}E = \varrho$: $\int_{\partial A} \nu \cdot E_0 = \int_{\partial A} \nu \cdot E = \int_A \mathrm{div}\ E = \int_A \varrho$. Eine außerhalb angebrachte Maschine kann also höchstens für solche E_0 ein E finden, die $\int_{\partial A} \nu \cdot E_0 = \int_A \varrho$ erfüllen, jedoch niemals für alle E_0. Sie sollten der Firma also nicht trauen und Ihr Geld für bessere Dinge ausgeben.

Aufgabe 36:

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit der Dichte $\varrho : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (v, ϱ stetig differenzierbar). Weil die Gesamtmasse erhalten bleibt, muss für jedes glatt berandete Kompaktum $G \subset U$ mit $\partial G \subset U$ die zeitliche Änderung $\partial_t \int_G \mathrm{d}x\ \varrho(x,t)$ der in G enthaltenen Flüssigkeitsmenge gleich der über den Rand ∂G in G einfließenden Flüssigkeit $-\int_{\partial G} \mathrm{d}S(x)\ \nu(x) \cdot (\varrho(x,t)v(x,t))$ sein. Beweisen Sie, dass dies äquivalent zur Kontinuitätsgleichung $\mathrm{div}(\varrho v) + \partial_t \varrho = 0$ auf $U \times \mathbb{R}$ ist.

Weil ϱ als C^1-Funktion vorausgesetzt wurde und stetige Funktionen über die beschränkte (da kompakte) Menge G integrierbar sind, darf man das Volumenintegral $\int_G \mathrm{d}x\ \varrho(x,t)$ nach Satz 2.23 unter dem Integralzeichen differenzieren. Daher

$$-\int_G \mathrm{d}x\ \mathrm{div}\ (\varrho(x,t)v(x,t)) = -\int_{\partial G} \mathrm{d}S(x)\ \nu(x) \cdot (\varrho(x,t)v(x,t)) = \partial_t \int_G \mathrm{d}x\ \varrho(x,t) = \int_G \mathrm{d}x\ \partial_t \varrho(x,t)$$

oder $\int_G \mathrm{d}x\ \{\mathrm{div}\ (\varrho(x,t)v(x,t)) + \partial_t \varrho(x,t)\} = 0$. Weil dies für beliebige glatt berandete Kompakta $G \subset U$ mit $\partial G \subset U$ gilt und der Integrand $f(x,t) := \mathrm{div}\ (\varrho(x,t)v(x,t)) + \partial_t \varrho(x,t)$ stetig ist, gilt $f(x,t) = 0$.
1. Begründung: Seien $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$ fest und $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x,t) - f(y,t)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta(x)$. Also

$$(f(x,t)-\varepsilon)\ \mathrm{vol}B_\delta(x) = \int_{B_\delta(x)} \mathrm{d}y\ (f(x,t)-\varepsilon) \leq \int_{B_\delta(x)} \mathrm{d}y\ f(y,t) \leq \int_{B_\delta(x)} \mathrm{d}y\ (f(x,t)+\varepsilon) = (f(x,t)+\varepsilon)\ \mathrm{vol}B_\delta(x)$$

oder mit $G = B_\delta(x)$

$$f(x,t) - \varepsilon \leq \frac{1}{\mathrm{vol}\; G} \int_G \mathrm{d}y \; f(y,t) = 0 \leq f(x,t) + \varepsilon.$$

Da diese Gleichung für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, ist $f(x,t) = 0$.
2. Begründung: Angenommen $f(x,t) \neq 0$ für ein $(x,t) \in U \times \mathbb{R}$, z.B. $f(x,t) > 0$. Da f stetig ist, ist $f(y,t) > 0$ für alle y in einer Umgebung G von x und $\int_G \mathrm{d}y \; f(y,t) > 0$. Das ist ein Widerspruch zum obigen $\int_G \mathrm{d}y \; f(y,t) = 0$, so dass $f(x,t) = 0$ sein muss.