Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. E. Schrohe, H. Gimperlein

15.1.2007

11. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 30:

a) Sei $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\varphi : I \to \varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch $\varphi(t) = (\sin(2t)\cos(t), \sin(2t)\sin(t))$. Ist φ eine Immersion? Beweisen Sie, dass es keine Karte ist.

Mit $c := \cos(t)$, $s := \sin(t)$ und $\cos(2t) = c^2 - s^2$, $\sin(2t) = 2sc$ hat man $\partial_t\varphi(t) = (2\cos(2t)c - \sin(2t)s, 2\cos(2t)s + \sin(2t)c) = (2(c^2 - s^2)c - 2s^2c, 2(c^2 - s^2)s + 2sc^2) = (2c(1 - 3s^2), 2s(2 - 3s^2))$. Für jedes $t \in I$ ist mindestens eine Komponente $\neq 0$, so dass φ eine Immersion ist. φ ist keine Karte, weil es kein Homöomorphismus ist: Wäre es einer, so wäre $\varphi(I)$ laut Satz 6.13 eine Untermannigfaltigkeit. Es ist aber ein brezelartiges Objekt, das in keiner Umgebung von $(0, 0)$ Graph einer Funktion ist (Widerspruch zu Satz 6.3). Andere Begründung: $\varphi^{-1} : \varphi(I) \to I$ ist nicht stetig, da in jeder beliebig kleinen offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)$ Punkte $x, y, z \in U$ liegen, so dass $\varphi^{-1}(x)$ nahe 0, $\varphi^{-1}(y)$ nahe $\frac{\pi}{2}$ und $\varphi^{-1}(z)$ nahe $-\frac{\pi}{2}$ (alle also weit auseinander) sind. Dritte Begründung: Wäre φ^{-1} stetig, so wäre das Bild $\varphi^{-1}(\varphi(I)) = I$ als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt, aber I ist nicht kompakt.

b) Nach Aufgabe 21a ist die Gruppe $SO(2)$ der Drehmatrizen eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie mit Hilfe des Drehwinkels eine Karte $\Phi : (0, 2\pi) \to SO(2) \subset \mathbb{R}^4$ an, und bestimmen Sie das eindimensionale Volumen von $SO(2)$.

Eine beliebige 2×2–Drehmatrix hat bekanntlich die Form $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ für einen Drehwinkel $t \in \mathbb{R}$. Die Karte $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ bildet daher $(0, 2\pi)$ auf $SO(2) \setminus \{E_2\}$ ab. E_2 ist als Punkt eine Nullmenge, so dass vol $SO(2) =$ vol $SO(2) \setminus \{E_2\}$. Schreiben der Matrix als Vektor: $\Phi(t) = (\cos(t), -\sin(t), \sin(t), \cos(t))$, $\partial_t\Phi(t) = (-\sin(t), -\cos(t), \cos(t), -\sin(t))$. Insgesamt $(\partial_t\Phi(t))^T\partial_t\Phi(t) = 2\sin^2(t) + 2\cos^2(t) = 2$ und vol $SO(2) =$ vol $SO(2) \setminus \{E_2\} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ \sqrt{(\partial_t\Phi(t))^T\partial_t\Phi(t)} = 2\sqrt{2}\pi$.

c) S^{n-1} bezeichne die $(n-1)$–dimensionale Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Zeigen Sie für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\int_{S^{n-1}} \mathrm{d}S(x)\ x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_n^{\alpha_n - 1} = \begin{cases} \frac{2\ \Gamma(\frac{1}{2}\alpha_1)\cdots\Gamma(\frac{1}{2}\alpha_n)}{\Gamma(\frac{1}{2}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n))}, & \textit{wenn alle } \alpha_j \textit{ ungerade sind,} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Zusatz: Kommt damit für den Quadrupoltensor $Q_{ij} = \int_S \mathrm{d}S(x)\ \varrho(x)\ \{3x_ix_j - \|x\|^2\delta_{ij}\}$ einer homogen mit $\varrho = 1$ geladenen zweidimensionalen Sphäre $S \subset \mathbb{R}^3$ vom Radius 1 um $(0, 0, a)$ etwas Einfaches heraus?

Nach Hinweis betrachten wir wie in der Übung

$$I := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ e^{-\|x\|^2}\ x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_n^{\alpha_n - 1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1\ e^{-x_1^2}\ x_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_n\ e^{-x_n^2}\ x_n^{\alpha_n - 1}\right).$$

Ist eins der α_j eine gerade Zahl, so ist $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_j\ e^{-x_j^2}\ x_j^{\alpha_j - 1}$ als Integral über eine ungerade Funktion $= 0$. Damit ist auch $I = 0$. Seien also alle α_j ungerade. Dann ist $e^{-x_j^2}\ x_j^{\alpha_j - 1}$ für alle j gerade und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_j\ e^{-x_j^2}\ x_j^{\alpha_j - 1} = 2\int_0^{\infty} \mathrm{d}x_j\ e^{-x_j^2}\ x_j^{\alpha_j - 1} = \int_0^{\infty} \mathrm{d}s\ s^{\frac{1}{2}\alpha_j - 1}e^{-s} = \Gamma(\frac{1}{2}\alpha_j)$$

mit der Substitution $x_j^2 = s$, $\mathrm{d}x_j = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s$. Zusammen: $I = \Gamma(\frac{1}{2}\alpha_1)\cdots\Gamma(\frac{1}{2}\alpha_n)$.
In Polarkoordinaten (mit $r^2 = s$, $\mathrm{d}r = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s$ sowie $t \in S^{n-1} \Leftrightarrow \|t\| = 1$!):

$$\left.\begin{array}{r}\Gamma(\frac{1}{2}\alpha_1)\cdots\Gamma(\frac{1}{2}\alpha_n)\\ 0\end{array}\right\} = I \begin{aligned}[t] &= \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^{n-1}\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}S(t)\ e^{-\|rt\|^2}\ (rt_1)^{\alpha_1-1}\cdots(rt_n)^{\alpha_n-1}\\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}r\ e^{-r^2}\ r^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n-1}\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}S(t)\ t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}s\ e^{-s}\ s^{\frac{1}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)-1}\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}S(t)\ t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}\\ &= \frac{1}{2}\ \Gamma(\frac{1}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_n))\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}S(t)\ t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}.\end{aligned}$$

Teilen durch $\frac{1}{2}\ \Gamma(\frac{1}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_n))$ liefert das gesuchte Ergebnis.
Zu Q_{ij}: Für $i \neq j$ ist $Q_{ij} = 3\int_S \mathrm{d}S(x)\ x_i x_j = 3\int_{S^2}\mathrm{d}S(x)\ (x_i + a\delta_{i3})(x_j + a\delta_{j3}) = 3\int_{S^2}\mathrm{d}S(x)\ (x_i x_j + a x_j\delta_{i3} + a x_i\delta_{j3} + a^2 x_i^2\delta_{i3}\delta_{j3}) = 0+0+0+0$, da entweder $\alpha_i = 2$ oder $\alpha_j = 2$, also gerade, oder $\delta_{i3}\delta_{j3} = 0$ für $i \neq j$ ist. Setze $C = \frac{2\ \Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(\frac{5}{2})}$ und $D = \frac{2\ \Gamma(\frac{1}{2})^3}{\Gamma(\frac{3}{2})}$. Wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ ist $D = 4\pi$. Damit $Q_{ii} = \int_{S^2}\mathrm{d}S(x)\ \{3(x_i + a\delta_{i3})^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3+a)^2\} = \int_{S^2}\mathrm{d}S(x)\ \{3x_i^2 + 6ax_i\delta_{i3} + 3a^2\delta_{i3} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2ax_3 - a^2\} = 3C + 0 + 3a^2 D\delta_{i3} - C - C - C - 0 - a^2 D$ oder $Q_{11} = Q_{22} = -4\pi a^2$, $Q_{33} = 8\pi a^2$. Dies geht natürlich auch ohne Γ.

Aufgabe 31:

a) In der Physik rechnet man oft mit einem Maßtensor g_{ij}, ohne die Details der Untermannigfaltigkeit M anzugeben: Kosmologen etwa beschreiben die drei Typen räumlich homogener Universen durch

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2))$$

($0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$) mit einem zeitabhängigen Skalierungsfaktor $a > 0$. Für $\Sigma(\chi) = \sin(\chi)$ erhält man ein räumlich nur endlich ausgedehntes Universum ($0 < \chi < \pi$), $\Sigma(\chi) = \chi$ liefert den ungekrümmten $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten ($0 < \chi < \infty$), und $\Sigma(\chi) = \sinh(\chi)$ gibt ein unendlich ausgedehntes, gekrümmtes Weltall ($0 < \chi < \infty$). Berechnen Sie in allen drei Fällen das Volumen V_Σ der durch $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$, $0 < \chi < \pi$ beschriebenen „Kugel."

$$g(\chi,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2\Sigma^2(\chi) & 0\\ 0 & 0 & a^2\Sigma^2(\chi)\sin^2(\theta)\end{pmatrix}, \quad \det g = a^6\Sigma^4(\chi)\sin^2(\theta)$$

liest man wie in der Übung aus $\mathrm{d}s^2$ ab. $V_\Sigma = \int_0^\pi \mathrm{d}\chi \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ a^3\Sigma^2(\chi)\sin(\theta) = 4\pi a^3\int_0^\pi \mathrm{d}\chi\ \Sigma^2(\chi)$. 1. Fall: $V_\Sigma = 4\pi a^3\int_0^\pi \mathrm{d}\chi\ \sin^2(\chi) = 2\pi^2 a^3$. 2. Fall: $V_\Sigma = 4\pi a^3\int_0^\pi \mathrm{d}\chi\ \chi^2 = \frac{4\pi^4 a^3}{3}$. 3. Fall: $\int_0^\pi \mathrm{d}\chi\ \sinh(\chi)^2 = \frac{1}{4}\int_0^\pi \mathrm{d}\chi\ \left\{e^{2\chi} - 2 + e^{-2\chi}\right\} = \frac{1}{4}\sinh(2\pi) - \frac{\pi}{2}$, d.h. $V_\Sigma = (\sinh(2\pi) - 2\pi)\pi a^3$.

b) Als „Radius" r_Σ der obigen Kugeln bezeichnet man das eindimensionale Volumen der bei festem θ, ϕ durch $0 < \chi < \pi$ parametrisierten Untermannigfaltigkeit. Vergleichen Sie $V_\Sigma r_\Sigma^{-3}$ für die Σs aus a).

Sei Φ die Karte der Untermannigfaltigkeit aus a). Eine Karte für die angegebene Untermannigfaltigkeit ist dann $\Psi(\chi) = \Phi(\chi,\theta,\phi)$, θ,ϕ fest gewählt, und $r_\Sigma = \int_0^\pi \mathrm{d}\chi\ \sqrt{(\partial_\chi\Psi)^t\partial_\chi\Psi}$. $(\partial_\chi\Psi)^T\partial_\chi\Psi = (\partial_\chi\Phi)^T\partial_\chi\Phi = a^2$ nach Definition von Ψ und wegen

$$g = (\partial\Phi)^T\partial\Phi = \begin{pmatrix}(\partial_\chi\Phi)^T\partial_\chi\Phi & (\partial_\chi\Phi)^T\partial_\theta\Phi & (\partial_\chi\Phi)^T\partial_\phi\Phi\\ (\partial_\theta\Phi)^T\partial_\chi\Phi & (\partial_\theta\Phi)^T\partial_\theta\Phi & (\partial_\theta\Phi)^T\partial_\phi\Phi\\ (\partial_\phi\Phi)^T\partial_\chi\Phi & (\partial_\phi\Phi)^T\partial_\theta\Phi & (\partial_\phi\Phi)^T\partial_\phi\Phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2\Sigma^2(\chi) & 0\\ 0 & 0 & a^2\Sigma^2(\chi)\sin^2(\theta)\end{pmatrix}.$$

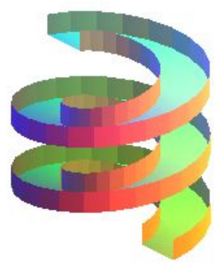
Also $r_\Sigma = \pi a$. Im flachen $\mathbb{R}^3$–Weltall ist wie erwartet $V_\Sigma = \frac{4\pi}{3}r_\Sigma^3$. Im endlich ausgedehnten, positiv gekrümmten Universum wächst das Volumen langsamer $V_\Sigma = \frac{2}{\pi}r_\Sigma^3 < \frac{4\pi}{3}r_\Sigma^3$, im negativ gekrümmten, unendlich ausgedehnten Raum ist das Kugelvolumen größer, $V_\Sigma = \frac{\sinh(2\pi)-2\pi}{\pi^2} r_\Sigma^3 > \frac{4\pi}{3} r_\Sigma^3$.

Aufgabe 32:

Der Senat der Uni möchte ab Sommer die Studienbedingungen mit einer Wasserrutsche im Lichthof verbessern. Wir haben exklusiv die vorläufigen Konstruktionspläne: Boden B und Seitenwände $S1$, $S2$ der Rutsche werden parametrisiert durch $\Phi_B : (a,b) \times (0,13\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\Phi_{S1}, \Phi_{S2} : (0,1) \times (0,13\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi_B(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos(\varphi) \\ t\sin(\varphi) \\ h\varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi_{S1}(s,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ a\sin(\varphi) \\ \delta s + h\varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi_{S2}(s,\varphi) = \begin{pmatrix} b\cos(\varphi) \\ b\sin(\varphi) \\ \tau s + h\varphi \end{pmatrix}.$$

Über $a, b, h, \delta, \tau > 0$ wird noch diskutiert, nur $a < b$ und $\delta, \tau < 2\pi h$ steht schon fest. Wieviele Flächeneinheiten Rutschfliesen werden für B, $S1$ und $S2$ benötigt? Zusatzpunkte: Skizzieren Sie die Rutsche.



Das Bild zeigt natürlich nur die unteren 2.5 von insgesamt 6.5 Windungen. a ist der innere Radius der Rutsche, b der äußere Radius, $2\pi h$ der vertikale Abstand zweier Windungen und δ bzw. τ die Höhe der Seitenwände $S1$ bzw. $S2$.

$$\partial\Phi_B(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -t\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & t\cos(\varphi) \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad g = (\partial\Phi_B)^T \partial\Phi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2+t^2 \end{pmatrix}, \quad \det g = h^2 + t^2.$$

Fläche des Bodens mit Stammfunktion $\int \mathrm{d}t \sqrt{h^2+t^2} = \frac{1}{2}\left\{t\sqrt{h^2+t^2} + h^2 \ln(t + \sqrt{h^2+t^2})\right\} + C$ (siehe z.B. Bronstein et al., *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Formel 185 auf Seite 1061 oder Merziger et al., *Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik*, Binomi, Formel 115 auf Seite 102):
$\mathrm{vol}\ B = \int_a^b \mathrm{d}t \int_0^{13\pi} \mathrm{d}\varphi\ \sqrt{h^2+t^2} = \frac{13\pi}{2}\left\{b\sqrt{h^2+b^2} - a\sqrt{h^2+a^2} + h^2 \ln\left(\frac{b+\sqrt{h^2+b^2}}{a+\sqrt{h^2+a^2}}\right)\right\}$.

$$\partial\Phi_{S1}(s,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -a\sin(\varphi) \\ 0 & a\cos(\varphi) \\ \delta & h \end{pmatrix}, \quad g = (\partial\Phi_{S1})^T \partial\Phi_{S1} = \begin{pmatrix} \delta^2 & \delta h \\ \delta h & h^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad \det g = \delta^2 a^2.$$

$\mathrm{vol}\ S1 = \int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^{13\pi} \mathrm{d}\varphi\ \delta a = 13\pi\delta a$. Ersetzt man a durch b und δ durch τ, so erhält man $\mathrm{vol}\ S2 = 13\pi\tau b$.
Benötigte Rutschfliesen: $\frac{13\pi}{2}\left\{2\delta a + 2\tau b + b\sqrt{h^2+b^2} - a\sqrt{h^2+a^2} + h^2 \ln\left(\frac{b+\sqrt{h^2+b^2}}{a+\sqrt{h^2+a^2}}\right)\right\}$.