Ü10

221 a) $\int_{\mathbb{R}} dx \; \frac{\cos(x)}{x^2} := \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \max\left\{\frac{\cos(x)}{x^2}, 0\right\}}_{=:①} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \max\left\{-\frac{\cos(x)}{x^2}, 0\right\}}_{=:②}$

$$① \geq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \; \frac{\cos(x)}{x^2} \geq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1/2}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon^3} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty \implies ① = \infty$$

$\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ für $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ falls ε klein

$$0 \leq ② = -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^2} - \int_{-3\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^2} - \int_{5\pi/2}^{7\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^2} - \int_{-\frac{7\pi}{2}}^{-5\pi/2} \frac{\cos(x)}{x^2} - \dots$$

$$\leq + \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^2} + \int_{-\infty}^{-\pi/2} \frac{|\cos(x)|}{x^2} \underset{|\cos(x)| \leq 1}{\leq} \underbrace{\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{x^2}}_{<\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{-\pi/2} \frac{1}{x^2}}_{<\infty} < \infty$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}} dx \; \frac{\cos(x)}{x^2} = \infty - (\text{endlich}) = \infty$$

b) $$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \; \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{= \partial_x \partial_y \arctan\left(\frac{x}{y}\right)} = \int_0^1 dx \; \frac{x}{y^2 + x^2}\Big|_{y=0}^{1} = \int_0^1 dx \; \frac{1}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \quad (*)$$

(siehe 5. Stundenübung)

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \int_0^1 dx \left\{ \frac{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{2y} - \frac{x}{2(x^2+y^2)} \right\}_{y=0}^{1} = \int_0^1 dx \left\{ \frac{\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \text{undef.} - \frac{x}{2x^2} \right\}$$

ist nicht definiert.

ähnlich für $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Die Fkt $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ist nicht integrierbar auf $[0,1]^2$, obwohl $(*) < \infty$.

c) $$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} dx \; f(x) \, e^{-n \sin^2(x)} \underset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}} dx \; f(x) \underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{-n \sin^2(x)}}_{= \begin{cases} 0, & x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}. \\ 1, & x = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}} = \int_{\mathbb{R}} dx \; 0 = 0.$$

(*) gilt, da $|f(x) e^{-n \sin^2(x)}| \leq |f(x)| \in L^1$ und somit $|f(x)|$ eine n-unabhängige int.bare Majorante ist (Satz von der dominiert. Konvergenz)

d) $f_n := \frac{1}{n} \chi_{[0,n^2]}$ tut's! $\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \cdot m([0,n^2]) = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, aber $f_n \to 0$ gleichmäßig.

e) $\rho(Dx) = \rho(x)$ für alle Drehmatrizen $\implies V(Dx) = -\int_K dy \frac{\rho(y)}{\|Dx - y\|}$

$$\underset{(y = Dz)}{=} -\int dz \frac{\rho(Dz)}{\underbrace{\|Dx - Dz\|}_{= \|x-z\|}} \underbrace{|\det(D)|}_{=1} = -\int dz \frac{\rho(Dz)}{\|x - z\|}$$

$$\underset{(\rho(Dz) = \rho(z))}{=} -\int dz \frac{\rho(z)}{\|x-z\|} = V(x) \implies V(Dx) = V(x) \; \forall D.$$

f) 1. Beweis: $F(x)$ Cauchyfolge + L^1 vollständig $\Longrightarrow$ Konvergent

C.F.: $\left\| \sum_{n=j}^{k} (-)^n e^{-nx} \right\|_1 = \int_0^\infty \Big| \underbrace{\sum_{n=j}^{k} (-)^n e^{-nx}}_{= (-)^j e^{-jx} \frac{1-(-)^{k+1} e^{-(k+1)x}}{1+e^{-x}}} \Big| \, dx$

konstantes Vorzeichen $\Rightarrow |\ldots| = (-)^j \ldots$

$= \int_0^\infty (-)^j \sum_{n=j}^{k} (-)^n e^{-nx} \, dx$

$= (-)^j \sum_{n=j}^{k} (-)^n \underbrace{\int_0^\infty e^{-nx} \, dx}_{= \frac{1}{n} - 0} = (-)^j \sum_{n=j}^{k} \frac{(-)^n}{n} \xrightarrow{j,k \text{ groß}} 0$

da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n}$ nach Leibnizkriterium konvergiert

$\Rightarrow$ $F(x)$ C.F.

2. Beweis: direkter Beweis:

$\forall x \in (0,\infty)$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n e^{-nx} = \frac{1}{1+e^{-x}}$ Zeige: $\left\| \sum_{n=0}^{N} (-)^n e^{-nx} - \frac{1}{1+e^{-x}} \right\|_1 \xrightarrow{N\to\infty} 0$

$\|\ldots\|_1 = \int_0^\infty dx \left| \frac{1-(-)^{N+1} e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-x}} \right| = \int_0^\infty \frac{e^{-(N+1)x}}{\underbrace{1+e^{-x}}_{\geq 1}} \, dx$

$\leq \int_0^\infty e^{-(N+1)x} \, dx = \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$.

g) $f \in L^p :\Longleftrightarrow f$ messbar, $\int dx \, |f|^p < \infty$

$\int_A dx \; 1 \, |f|^q \underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_A dx \; 1 \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_A dx \, |f|^{qr} \right)^{1/r} \underset{\substack{r=\frac{p}{q} \\ m(A)<\infty}}{=} C \Big(\underbrace{\int_A dx \, |f|^p}_{<\infty} \Big)^{q/p} < \infty$,

$\left(\int uv \leq \left(\int u^{1/(1-\frac{1}{r})} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int v^r \right)^{1/r} \right)$

$\Rightarrow f \in L^q$

h) $\int_0^{2\pi} dx \; u(x) \underbrace{\sin(kx)}_{= \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})} = \frac{2\pi}{2i} \left(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k) \right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \Longrightarrow \left| \hat{f}(k) - \hat{f}(-k) \right| = \frac{1}{\pi\sqrt{k}}$

$\Rightarrow$ entweder $|\hat{f}(k)|$ oder $|\hat{f}(-k)|$ muss $\geq \frac{1}{2\pi\sqrt{k}}$ sein $\Rightarrow \|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$

$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{k}} \right)^2$

$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

$\Rightarrow \|f\|_2 = \infty$, $f \notin L^2_{2\pi}$.

3| $\mu(A_0 \setminus (A_0 \cap A_1)) = \mu(A_0) - \mu(A_0 \cap A_1)$ da $A_0 \cap A_1 \subset A_0$

$$\mu(A_0) = \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ maßerhaltend}}}{=} \mu\Big(f^{-1}\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A)\Big)\Big)$$

$$= \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-k}(A)\Big) \Rightarrow \mu(A_0) = \mu\Big(\bigcap_{k=-1}^{\infty} f^{-k}(A)\Big) = \dots = \mu\Big(\bigcap_{k=-n}^{\infty} f^{-k}(A)\Big) \quad \forall n \geq 0.$$

Nach 2. Stundenübung $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{k=-n}^{\infty} f^{-k}(A)\Big)}_{=\mu(A_0)} = \mu\Big(\bigcap_{n} \bigcap_{k=-n}^{\infty} f^{-k}(A)\Big) = \mu\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} f^{-k}(A)\Big)$

$= \mu(A_0 \cap A_1)$

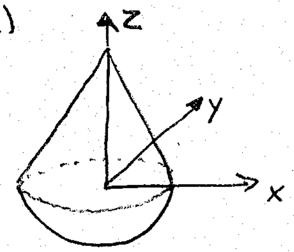
$\Rightarrow \mu(A_0 \setminus (A_0 \cap A_1)) = \mu(A_0) - \mu(A_0) = 0.$

Genauso mit f^{-1} maßerhaltend $\Rightarrow \mu(A_1 \setminus (A_0 \cap A_1)) = 0$

$\Rightarrow$ Gilt (i) für ein $x \in A$ $\Rightarrow x \in A_1 \underset{\text{oben}}{\Rightarrow} x \in A_0$, falls $x \notin \underbrace{A_1 \setminus (A_0 \cap A_1)}_{\text{Nullmenge}} \Rightarrow$ (ii)

Gilt (ii) für ein $x \in A$ $\Rightarrow x \in A_0 \underset{\text{oben}}{\Rightarrow} x \in A_1$, falls $x \notin \underbrace{A_0 \setminus (A_0 \cap A_1)}_{\text{Nullmenge}} \Rightarrow$ (i)

24| a)



Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der z-Achse. Die Aufstehbedingung ist, das seine z-Komponente < 0 ist, d.h.

$$\Big(\int_{\text{Halbkugel}} 8z \, d(x,y,z) + \int_{\text{Kegel}} z \, d(x,y,z)\Big) \cdot \frac{1}{\text{Gesamtmasse}} < 0 \quad \text{oder}$$

$$\int_{\text{Halbkugel}} 8z < -\int_{\text{Kegel}} z. \quad \text{Linke Seite} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \,(8 r\cos(\vartheta))\, r^2 \sin(\vartheta)$$

$$= -2\pi$$

$$\text{Rechte Seite} = \int_0^h dz\, z \int_{\substack{\text{(Kreis vom Radius} \\ 1-\frac{z}{h})}} d(x,y) = \pi \int_0^h \Big(z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}\Big) dz$$

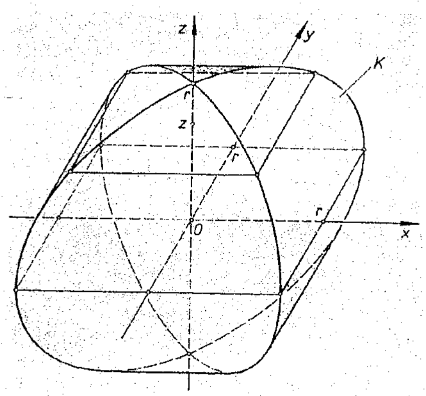
$$\int_{\substack{\text{(Kreis vom Radius} \\ 1-\frac{z}{h})}} d(x,y) = \pi\Big(1-\frac{z}{h}\Big)^2$$

$$= \pi\Big\{\frac{h^2}{2} - \frac{2}{3}h^2 + \frac{1}{4}h^2\Big\} = \frac{\pi h^2}{12}$$

$\Rightarrow$ Männchen steht für $h < \sqrt{24}$ wieder auf.

b) Zu berechnen ist das Volumen des Durchschnitts D der beiden Kreiszylinder im $\mathbb{R}^3$, die durch die Ungleichungen $x^2 + z^2 \leq R^2$ und $y^2 + z^2 \leq R^2$ beschrieben werden. Die Schnitte des Körpers mit Ebenen $\{z = const\}$ parallel zur (x,y)-Ebene sind Quadrate $D_{[z]}$ mit Seitenlänge $a = 2\sqrt{R^2 - z^2}$ und Flächeninhalt

$$\lambda_2(D_{[z]}) = a^2 = 4(R^2 - z^2)\,.$$



Nach Cavalieri ist das Volumen
(= Fubini)

$$\lambda_3(D) \;=\; \int_{-R}^{R} \lambda_2(D_{[z]})\,dz \;=\; \int_{-R}^{R} 4(R^2 - z^2)\,dz \;=\; 8\int_0^R (R^2 - z^2)\,dz$$
$$\;=\; 8R^2R - 8\frac{R^3}{3} \;=\; \frac{16}{3}R^3\,.$$

Der umgebende Würfel W hat das Volumen

$$\lambda_3(W) \;=\; (2R)^3 \;=\; \frac{3}{2}\cdot\lambda_3(D)\,.$$

251

siehe z.B. Timmann - Rep. (Zylinderkoordinaten!
$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$
$z = z$
$d(x,y,z) = r\,d(r,\varphi,z)$)

1.61 $$Z(g) = \int_{\mathbb{R}} d\phi \, \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4}}_{=:\, f(g,\phi)}$$

1.) $Z(g)$ stetig in $g \geq 0$: <u>Satz 2.22</u>:
- $f(g,\phi)$ ist messbar $\forall g>0$ ✓
- $|f(g,\phi)| = e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4} \leq e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \in L^1 \quad \forall g>0$
- $\lim_{g\to g_0} f(g,\phi) = f(g_0,\phi) \quad \forall g_0>0$ da f stetig

$\xRightarrow{(2.22)}$ $Z(g)$ stetig in jedem $g_0>0$.

2.)
- $\forall g>0$ ist $f(g,\phi)$ in ϕ integrierbar (Riemann-Integral existiert, $f(g,\phi)\geq 0$)
- $g \mapsto \partial_g f = -\frac{\phi^4}{4!} f(g,\phi)$ ist stetig in $g>0$
- $|\partial_g f| = \frac{1}{4!}\phi^4 e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4} \leq \frac{1}{4!}\phi^4 e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \in L^1 \quad \forall g>0$

$\Rightarrow$ (Satz 2.23) $Z(g)$ diffbar in $g>0$.

3.) Induktiv folgt wegen
- $\partial_g^k f$ intbar in ϕ $\forall g>0$
- $g \mapsto \partial_g^k f = \left(-\frac{\phi^4}{4!}\right)^k f(g,\phi)$ stetig in $g>0$
- $|\partial_g^k f| = \left(\frac{1}{4!}\phi^4\right)^k e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4} \leq \left(\frac{1}{4!}\phi^4\right)^k e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \in L^1$

$\Rightarrow$ (Satz 2.23) $Z(g)$ k-mal diffbar in $g>0$ $\Rightarrow Z \in C^\infty \quad \forall g>0$

Formale Rechnung:
$$\partial_g^k Z(g)\Big|_{g=0} = \int_{\mathbb{R}} d\phi \left(-\frac{1}{4!}\phi^4\right)^k e^{-\frac{1}{2}\phi^2} = \left(\frac{1}{4!}\right)^k \int_{\mathbb{R}} d\phi\, \phi^{4k} e^{-\frac{\phi^2}{2}}$$
$$= \left(\frac{-1}{4!}\right)^k 2\int_0^\infty d\phi\, \phi^{4k} e^{-\frac{\phi^2}{2}}$$

leichter mit Formelsammlung $\left\{ \begin{array}{l} \phi^2 = 2s \\ d\phi = \frac{ds}{\sqrt{2s}} \end{array} \right\}$

$$= \left(\frac{-1}{4!}\right)^k \underbrace{2\int_0^\infty ds\,(2s)^{2k-\frac{1}{2}} e^{-s}}_{= 2^{2k+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(2k+\frac{1}{2}\right)}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$= \left(\frac{-1}{4!}\right)^k 2^{2k+\frac{1}{2}} \frac{(4k)!\,\sqrt{\pi}}{(2k)!\,2^{4k}}$$
$$= \left(\frac{-1}{4!}\right)^k \sqrt{2\pi}\,\frac{(4k)!}{(2k)!\,2^{2k}}$$

$\Rightarrow$ Taylorreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k g^k$ mit $a_k = \left(\frac{-1}{4!}\right)^k \frac{\sqrt{2\pi}\,(4k)!}{(2k)!\,2^{2k}\,k!}$

Quotientenkriterium: $\frac{|a_{k+1}g^{k+1}|}{|a_k g^k|} = 4!\,g\,\frac{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)}{(2k+2)(2k+1)\,4k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius:

271 a) 1.) $\int_0^1 dy \int_{-1}^{1} dx \frac{1}{1+xy} = \int_0^1 dy \int_{-1}^{1} dx \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k$

geom. Reihe

Setze $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-xy)^k \Longrightarrow |f_n(x)| \overset{\downarrow}{=} \frac{1-\overbrace{(-xy)^{k+1}}^{\geq -1}}{\underbrace{1+xy}_{\geq 1-y}}$

$\leq \frac{1+1}{1-y} = \frac{2}{1-y}$

$\frac{2}{1-y}$ ist als in x konstante Fkt. integrierbar über $[-1,1]$

$\underset{\text{Satz von der dominierten Konvergenz}}{\Longrightarrow} \int_{-1}^{1} dx \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-y)^k \underbrace{\int_{-1}^{1} x^k \, dx}_{= \begin{cases} 0 & , k \text{ ungerade} \\ \frac{2}{k+1} & , k \text{ gerade} \end{cases}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2y^{2k}}{2k+1}$

Satz von der monotonen Konvergenz $\Longrightarrow \int_0^1 dy \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2y^{2k}}{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^1 dy \, y^{2k}$

$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (*)$

IM NETZ

2.) $(*) \overset{1.)}{=} \int_0^1 dy \int_{-1}^{1} dx \frac{1}{1+xy} \overset{\substack{u = x + \frac{1}{2}y(x^2-1) \\ du = dx + yx\,dx}}{=} \int_0^1 dy \int_{-1}^{1} du \frac{1}{1+2uy+y^2}$

(Fubini) $= \int_{-1}^{1} du \underbrace{\int_0^1 dy \frac{1}{1+2uy+y^2}}_{= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{y+u}{\sqrt{1-u^2}} \Big|_{y=0}^{1} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}\right) + \text{ungerade Fkt}} = \int_{-1}^{1} du \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}\right) + \cancel{\text{ungerade Fkt}} \right\}$

Schwierig!!!

$\boxed{\begin{array}{l} u = \cos(2\varphi) \\ du = 2\sin(2\varphi)\,d\varphi \\ \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \tan(\varphi) \end{array}}$ $= 2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2}} \sin(2\varphi)}_{=1} \underbrace{\arctan(\tan(\varphi))}_{=\varphi} d\varphi = 2 \left[\frac{\varphi^2}{2} \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$

$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $\int_{\mathbb{R}^3} \rho_F = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin(\vartheta)}_{= 4\pi} \underbrace{\int_0^{\infty} dr \, r^2 \frac{1}{1+e^{(r-c)/z}}}_{= z^3 \int_0^{\infty} ds \, s^2 \frac{1}{1+e^{s-s_0}}, \; s_0 = \frac{c}{z}} = 4\pi z^3 \int_0^{s_0} ds \, s^2 \frac{1}{1+e^{s-s_0}} + 4\pi z^3 \int_{s_0}^{\infty} ds \, s^2 \underbrace{\frac{1}{1+e^{s-s_0}}}_{= e^{-(s-s_0)} \frac{1}{1+e^{-(s-s_0)}}}$

$= 4\pi z^3 \Big\{ \int_0^{s_0} ds \, s^2 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n e^{-ns_0} e^{ns} \right\}$

$+ \int_{s_0}^{\infty} ds \, s^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n e^{(n+1)s_0} e^{-(n+1)s}}_{= \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n e^{ns_0} e^{-ns}} \Big\}$

$\int_0^{s_0} ds \, s^2 e^s = e^{s_0}(s_0^2 - 2s_0 + 2) - 2$

$\int_{s_0}^{\infty} ds \, s^2 e^{-s} = e^{-s_0}(s_0^2 + 2s_0 + 2)$ Mit dominierter Konvergenz $\Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_F = 4\pi z^3 \left\{ \frac{1}{3} s_0^3 + 4 s_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{1}{n^3} e^{-n s_0} \right\}$$

$$= \frac{4\pi c^3}{3} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi z}{c}\right)^2 - 6\left(\frac{z}{c}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^3} e^{-nc/z} \right\}$$

28|

$$\int_V |f_\alpha(x)|^p \, dx = \int dr\, r^{n-1} \underbrace{\int_0^\pi d\varphi_1 \sin(\varphi_1)^{n-2} \cdots \int_0^\pi d\varphi_{n-2} \sin(\varphi_{n-2}) \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}}_{= \operatorname{vol} S^{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}} r^{\alpha p}$$

(siehe 14b oder 11. Stundenübung)

$$= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int dr\, r^{n-1+\alpha p}$$

$$= \frac{1}{n-1+\alpha p} r^{n+\alpha p} \Big]_{r=\ldots}^{\ldots}$$

Für $V = B_1(0)$: $r \in (0,1)$
$V = \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$: $r \in (1,\infty)$

$V = B_1(0)$: $\Rightarrow \|f_\alpha\|_p = \sqrt[p]{\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{n-1+\alpha p}}$ falls $n-1+\alpha p > -1 \Leftrightarrow p > \frac{-n}{\alpha}$

sonst $= \infty$, wie man leicht via $\int_\varepsilon^1 dr\, r^{n-1+\alpha p} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$ sieht.

$V = \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$: $\Rightarrow \|f_\alpha\|_p = \sqrt[p]{\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{1-\alpha p-n}}$ falls $n-1+\alpha p < -1 \Leftrightarrow p < -\frac{n}{\alpha}$

sonst $= \infty$ wie oben.

29| $\hat{f}(n) = \langle \chi_{(0,1)}, \sqrt{n+\frac{1}{2}}\, P_n \rangle = \sqrt{n+\frac{1}{2}} \int_0^1 dx\, P_n(x)$

16c: $(1-x^2)\,\partial_x^2 P_n(x) - 2x\,\partial_x P_n(x) + n(n+1) P_n(x) = 0$

d.h. $(n \neq 0)$ $\boxed{\int_0^1 dx\, P_n(x)} = \frac{1}{n(n+1)} \left(2\int_0^1 x\,\partial_x P_n(x) - \int_0^1 (1-x^2)\,\partial_x^2 P_n(x) \right)$

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\partial_x^2 P_n(x) = \Big[(1-x^2)\,\partial_x P_n(x)\Big]_{x=0}^1 + \int_0^1 2x\,\partial_x P_n(x) = -\partial_x P_n(0) + 2\int_0^1 x\,\partial_x P_n(x)$$

$$= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}\,\partial_x P_n(0)}$$

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\partial_x^n (x^2-1)^n$ aus 16. $(x^2-1)^n$ ist gerade $\Rightarrow \partial_x^{2k+1}(x^2-1)\big|_{x=0} = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\partial_x P_n(0) = 0 \text{ für } n \text{ gerade.}}$

n ungerade: $\partial_x P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\partial_x^{n+1} \underbrace{(x^2-1)^n}_{= x^{2n} + \ldots (-)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} x^{n+1} + \ldots}$

$\Rightarrow \partial_x P_n(0) = \frac{(n+1)!}{2^n n!} (-)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ kann man noch vereinfachen...

$n=0$: $P_0 = 1$, $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , n = 0 \\ 0 & , n \text{ gerade} \\ \text{kompliziert} & , n \text{ ungerade (siehe oben)} \end{cases}$$