

1. Übungsblatt zu Mathematik für Physiker I — Lösungshinweise

Aufgabe 1:

a) In diesem Semester möchte Herr Scholz die (Matrikelnummern der) 90 neuen Erstsemester auf 36 kleine Projekte P_1, \dots, P_{36} aufteilen. Am liebsten hätte er nur Zweiergruppen, aber die große Teilnehmerzahl zwingt ihn dazu, auch Dreiergruppen zu bilden. Wieviele Möglichkeiten hat er, die Studenten auf P_1, \dots, P_{36} zu verteilen, so dass die Hälfte der Projekte von je zwei und die andere Hälfte von je drei Studenten bearbeitet wird?

Es gibt $\binom{36}{18} \binom{90}{2} \binom{88}{2} \cdots \binom{56}{2} \binom{54}{3} \binom{51}{3} \cdots \binom{3}{3} = \frac{36!}{18!18!} \frac{90!}{2^{18} 3^{18}} \approx 5.064382154 \times 10^{128}$ Möglichkeiten. Der erste Faktor zählt die Möglichkeiten, 18 der 36 Projekte für Zweiergruppen auszuwählen, der zweite Faktor die verschiedenen Zweiergruppen für das erste Zweierprojekt, der dritte dann die verbleibenden Möglichkeiten für das zweite Zweierprojekt usw. bis alle Studenten verteilt sind.

b) Nach einer langen Nacht macht sich Herr B. vom Oktoberfest ($x = 0$) auf den Weg nachhause. Da er schon etwas wackelig auf den Beinen ist, schafft er nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen großen Schritt (Länge 1) nach vorne. Mit derselben Wahrscheinlichkeit setzt sein Fuß in der entgegengesetzten Richtung auf (ebenfalls Schrittlänge 1). Auch am neuen Ort $x = 1$ bzw. $x = -1$ bestimmt der Zufall seinen Weg etc. bis er nach k Schritten am Punkt $x(k)$ einschläft. Berechnen Sie $\langle x(k) \rangle$ und $\langle x(k)^2 \rangle$. Wie oft erwarten Sie ihn für $k \rightarrow \infty$ an seinem Ausgangspunkt zurück?

Da Schritte nach vorne und hinten gleichwahrscheinlich sind und Herr B. bei $x = 0$ startet, ist das Problem symmetrisch unter $x \mapsto -x$, d.h. Vertauschung von „Vorne“ und „Hinten“. Daher ist die Wahrscheinlichkeit $p(x(k) = j)$, Herrn B. bei $x(k) = j$ zu finden, gleich der Wahrscheinlichkeit $p(x(k) = -j)$, ihn bei $x(k) = -j$ zu finden (zur Not per Induktion). Daher $\langle x(k) \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j p(x(k) = j) = \sum_{j=1}^{\infty} \{j p(x(k) = j) - j p(x(k) = -j)\} = 0$.

$\langle x(k)^2 \rangle$ berechnen wir wie in der Übung: $x(k)^2 = (x(k-1) \pm 1)^2 = x(k-1)^2 \pm 2x(k-1) + 1$, + und - jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wie in der Stundenübung folgt $\langle x(k)^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle x(k-1)^2 \rangle + 2\langle x(k-1) \rangle + 1) + \frac{1}{2} (\langle x(k-1)^2 \rangle - 2\langle x(k-1) \rangle + 1) = \langle x(k-1)^2 \rangle + 1$. Aus $\langle x(0)^2 \rangle = 0$ ergibt sich somit per Induktion $\langle x(k)^2 \rangle = k$.

Ist B. nach k Schritten am Ursprung $x = 0$, so hat er jeweils $\frac{k}{2}$ Schritte vor- bzw. rückwärts gemacht. Insbesondere muss k eine gerade Zahl sein. Die Anzahl der Wege, die nach $k = 2n$ Schritten am Ursprung enden, ist gleich der Zahl der Möglichkeiten, n Vorwärtsschritte auf insgesamt $2n$ Schritte zu verteilen: $\binom{2n}{n}$. Da die Wahrscheinlichkeit eines jedes einzelnen Weges aus $2n$ Schritten gleich $\frac{1}{2^{2n}}$ ist, erhält man für die Wahrscheinlichkeit p_{2n} , nach $2n$ Schritten bei $x = 0$ zu sein, somit $p_{2n} = (\text{Wahrscheinlichkeit eines Weges aus } 2n \text{ Schritten}) \times (\text{Anzahl Wege mit } x(2n) = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$. Für ungerade k ist $p_k = 0$. Der Erwartungswert dafür, wie oft B nach k Schritten bei $x = 0$ war, ist also $\sum_{j=0}^k 1 p_j$. Für $k \rightarrow \infty$: $\sum_{j=0}^k 1 p_j = \sum_{n=0}^{k/2} 2^{-2n} \binom{2n}{n} = \sum_{n=0}^{k/2} 2^{-2n} \frac{2n(2n-1)\cdots(2)(1)}{n^2(n-1)^2\cdots 2^2 1^2} = \sum_{n=0}^{k/2} \frac{n(n-\frac{1}{2})\cdots(1)(\frac{1}{2})}{n^2(n-1)^2\cdots 2^2 1^2} = \sum_{n=0}^{k/2} \frac{1}{n} \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})}{(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)} > \sum_{n=0}^{k/2} \frac{1}{2n} \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2:

Wir betrachten die Gruppe G der Drehungen des \mathbb{R}^2 um den Ursprung. Für eine Drehung $g \in G$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $g(x, y)$ den gedrehten Vektor. Ist $M \subset \mathbb{R}^2$, so sei $gM = \{g(x, y) : (x, y) \in M\}$.

Da Drehungen Abstände erhalten, bildet G den Einheitskreis S^1 auf sich ab, d.h. $gS^1 = S^1$ für alle $g \in G$.

a) Man zeige, dass

$$(x, y) \sim (u, v) :\Leftrightarrow \text{es existiert eine Drehung } g \text{ um einen rationalen Winkel mit } g(x, y) = (u, v)$$

für $(x, y), (u, v) \in S^1$ eine Äquivalenzrelation auf S^1 definiert.

$g_\phi \in G$ bezeichne die Drehung um den Winkel ϕ .

1.) \sim ist reflexiv: $(x, y) \sim (x, y)$, da $(x, y) = g_0(x, y)$ und $0 \in \mathbb{Q}$.

2.) \sim ist symmetrisch: Ist $(x, y) \sim (u, v)$, so existiert $\phi \in \mathbb{Q}$ mit $(u, v) = g_\phi(x, y)$ und daher $(x, y) = g_\phi^{-1}(u, v) = g_{-\phi}(u, v)$. Folglich $(u, v) \sim (x, y)$.

3.) \sim ist transitiv: Gilt $(x, y) \sim (u, v)$ und $(u, v) \sim (w, z)$, so gibt es $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{Q}$ mit $(u, v) = g_{\phi_1}(x, y)$, $(w, z) = g_{\phi_2}(u, v)$. Also ist $(w, z) = g_{\phi_2}g_{\phi_1}(x, y) = g_{\phi_1+\phi_2}(x, y)$. Da $\phi_1 + \phi_2 \in \mathbb{Q}$, folgt $(x, y) \sim (w, z)$.

b) Finden Sie mit Hilfe des Auswahlaxioms Teilmengen $M_j \subset S^1$ und $g_j \in G$, $j \in \mathbb{N}$, mit $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $S^1 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_{2j} M_{2j} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_{2j+1} M_{2j+1}$.

$[x, y]$ bezeichne die Äquivalenzklasse von $(x, y) \in S^1$ bezüglich der Äquivalenzrelation \sim aus a). Sei $S = \{[x, y] : (x, y) \in S^1\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Nach Auswahlaxiom existiert $M \subset S^1$, so dass aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Repräsentant Element von M ist. Sei $\phi_1, \phi_2, \dots \in \mathbb{Q}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen und $M_j = g_{\phi_j} M$. Nach Definition von M unterscheiden sich die Elemente in M um irrationale Drehungen, so dass $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Ist $(x, y) \in S^1$, so enthält M nach Definition genau ein $(u, v) \in S^1$ mit $[x, y] = [u, v]$ bzw. $(u, v) \sim (x, y)$. Also existiert $j \in \mathbb{N}$ mit $(x, y) = g_{\phi_j}(u, v)$, d.h. $(x, y) \in g_{\phi_j} M = M_j$, und somit $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = S^1$. Definiert man $g_{2j+1} = g_{\phi_j} g_{\phi_{2j+1}}^{-1}$, so ist $g_{2j+1} M_{2j+1} = M_j$ und damit $S^1 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_{2j+1} M_{2j+1}$. Analog $S^1 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_{2j} M_{2j}$ für $g_{2j} = g_{\phi_j} g_{\phi_{2j}}^{-1}$.

c) Es gibt keine auf allen Teilmengen von S^1 definierte Funktion μ mit Werten in $[0, \infty]$ und $\mu(S^1) = 2\pi$, die σ -additiv ($\mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(M_j)$) für alle $M_j \subset S^1$ mit $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i \neq j$) und rotationsinvariant ($\mu(M) = \mu(gM)$) für alle $M \subset S^1$ und alle $g \in G$) ist.

Annahme: $\exists \mu$ mit den genannten Eigenschaften. Dann ist $\mu(\emptyset) = 0$, da $\mu(S^1) = \mu(S^1 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \emptyset) = \mu(S^1) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset)$ oder $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset) = 0$ ($\mu(S^1) = 2\pi < \infty!$). Daher gilt auch $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \emptyset) = \mu(A) + \mu(B) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset) = \mu(A) + \mu(B)$ für beliebige $A, B \subset S^1$. Somit folgt nach b) $2\pi = \mu(S^1) = \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j) = \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_{2j} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_{2j+1}) = \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_{2j}) + \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_{2j+1}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(M_{2j}) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(M_{2j+1})$. Wegen der Rotationsinvarianz ist dies $= \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(g_{2j} M_{2j}) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(g_{2j+1} M_{2j+1}) = \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_{2j} M_{2j}) + \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_{2j+1} M_{2j+1}) = \mu(S^1) + \mu(S^1) = 4\pi$. Also $2\pi = 4\pi$. Widerspruch!

d) Es gibt keine auf allen Teilmengen von \mathbb{R} definierte Funktion μ mit Werten in $[0, \infty]$ und $\mu([0, 1]) = 1$, die σ -additiv und translationsinvariant ($\mu(M) = \mu(\{m+c : m \in M\})$) für alle $M \subset \mathbb{R}$ und alle $c \in \mathbb{R}$) ist.

Annahme: $\exists \mu$ mit den genannten Eigenschaften. Dann ist die Einschränkung $\mu|_{[0,1]}$ von μ auf die Teilmengen von $[0, 1)$ invariant unter den Translationen modulo \mathbb{Z} und wohldefiniert auf allen Teilmengen von $[0, 1)$. Definiert man eine Bijektion $j : S^1 \rightarrow [0, 1)$ durch Polarkoordinaten $j((\cos(\phi), \sin(\phi))) = \frac{\phi}{2\pi}$ für $\phi \in [0, 2\pi)$, so erfüllt $\tilde{\mu} = 2\pi \mu|_{[0,1]} \circ j$ die Voraussetzungen von c). Widerspruch, da keine Funktion mit den in c) genannten Eigenschaften existiert! Also existiert auch kein μ mit den Eigenschaften der Aufgabenstellung.