

Hilberträume

• $(H, \|\cdot\|)$ Banachraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

• $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in H$

für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$

d.h. $\forall x, y, z \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

* $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

* $\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle$

* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

* $\langle x, x \rangle \geq 0, = 0 \iff x = 0$

Physik: $\langle \lambda x, z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, z \rangle$

$\{x_i \in H : i \in I\}$ orthogonal: $\iff \langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

orthonormal: $\iff \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i \neq j$

Orthogonales Komplement von $M \subset H$:

$$M^\perp = \{x \in H : \langle x, m \rangle = 0 \quad \forall m \in M\}$$