Warum Lebesgue?

- NICHT zum Ausrechnen konkreter Integrale (Riemann / Computer)
- einfache, sehr starke Sätze zu
  - $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n$
  - Stetigkeit / Diffbarkeit von $\alpha \mapsto \int dx\, f(x,\alpha)$ insb. $\partial_\alpha \int = \int \partial_\alpha$
  - $\int dx \int dy = \int dy \int dx$
  - und viele mehr...
- Allgemeinheit: $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
  - $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = m$
  - $\mu = \sum_x \delta_x$ Dirac-Punktmaße (Ü2.4) $\Longrightarrow$ „Summen = Integrale"
  - $X =$ Gruppe der Symmetrien eines phys. Systems (Festkörper-/ Hochenergiephysik)
- Anwendungen (~~Riemann~~)
  - Fourier trafo
  - $\delta(x)$ und andere Distributionen
  - partielle Differentialgleichungen
  - Quantenmechanik (= Lineare Algebra auf L^2)

Hauptsätze

Monotone Konvergenz

- f_j messbar
- $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \quad \forall x$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \int f_j = \int \lim_{j\to\infty} f_j$$

Dominierte Konvergenz

- f_j messbar
- $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existiere $\forall x$ außerhalb Nullmenge
- $\exists\, g$ intbar: $|f_j(x)| \leq g(x)$ $\forall x$ außerhalb Nullmenge

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} f_j \text{ int. bar}, \quad \lim_{j\to\infty} \int f_j = \int \lim_{j\to\infty} f_j$$

Folgerungen

Stetigkeit von Parameterintegralen

- $T \subset \mathbb{R}^k$, $t_0 \in T$, $f: T \times X \to \mathbb{R}$
- t fest $\Rightarrow$ $f(t,\cdot)$ messbar
- $\exists\, g$ intbar $|f(t,x)| \leq g(x)$ $\forall x$ außerhalb Nullmenge
- $\lim_{t\to t_0} f(t,x) = f(t_0,x)$ $\forall x$ außerhalb Nullmenge

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0} \int dx\, f(t,x) = \int dx \lim_{t\to t_0} f(t,x)$$

Differenzieren

- t fest $\Rightarrow$ $f(t,\cdot)$ int. bar
- x fest $\Rightarrow$ $t \mapsto \partial_{t_j} f(t,x)$ stetig auf T
- $\exists\, h$ int. bar $\forall t,x : |\partial_{t_j} f(t,x)| \leq h(x)$

$$\Rightarrow \partial_{t_j} \int dx\, f(t,x) = \int dx\, \partial_{t_j} f(t,x) \quad \forall t$$