Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein 1.12.2009

9. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 41 *schwach–* Folgenkompaktheit*
Sei X ein Banachraum. Man zeige, dass die abgeschlossene Einheitskugel $B_{X'} := \{x' \in X' : \|x'\| \leq 1\}$ schwach–* folgenkompakt ist, d.h. jede Folge $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{X'}$ eine in $B_{X'}$ bezüglich der $\sigma(X', X)$–Topologie konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 42
Sei X ein reflexiver Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Man zeige: Das Bild der Einheitskugel in X unter A ist abgeschlossen.

Aufgabe 43 *Satz von Atkinson*
Für $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

a) Es existiert $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, so dass $BA - \mathrm{Id}$ und $AB - \mathrm{Id}$ kompakt sind.

b) Bild A ist abgeschlossen, und $\ker A$ und $Y/\text{Bild } A$ sind endlichdimensional.

Hinweis zu b) $\Rightarrow$ a): Nach Übungsblatt 4 ist $X = \ker A \oplus \tilde{X}$. Der Satz von der offenen Abbildung gibt Ihnen eine stetige Inverse von $A|_{\tilde{X}}$ auf das Bild von A. Setzen Sie diese durch 0 fort.
Bemerkung: Die Bedingung aus b), dass Bild A *abgeschlossen sei, ist automatisch erfüllt.*

Aufgabe 44 *Index eines Fredholmoperators*
Ein Operator, der die Bedingungen in Aufgabe 43 erfüllt, wird als Fredholmoperator bezeichnet. Man definiert index $A = \dim\ker A - \dim Y/\text{Bild } A$. Beweisen Sie:

a) Sind $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ Fredholm, so auch BA, und es ist index $BA = \text{index}A + \text{index}B$.

b) Ist $A \in \mathcal{K}(X)$, so ist $\mathrm{Id} + A$ Fredholm und index $(\mathrm{Id} + A) = 0$.

c) Ist A Fredholm und $BA - \mathrm{Id}$ und $AB - \mathrm{Id}$ kompakt, so ist auch B Fredholm mit Index $-$index A.

d) Ist A Fredholm und $B \in \mathcal{K}(X, Y)$, so ist $A + B$ Fredholm und index $(A + B) =$ index A.

e) Die Operatoren $L, R \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$, $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, $R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, sind Fredholm. Was sind Ihre Indizes?

f) Die Ableitung $\partial_x : C^1_{2\pi} \to C^0_{2\pi}$ auf den 2π–periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist ein Fredholmoperator. Was ist ihr Index?

g) Die Ableitung $\partial_x : C^1_{2\pi,-} \to C^0_{2\pi,-}$ auf den *getwistet–periodischen* Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $f(x + 2\pi) = -f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist ein Fredholmoperator. Was ist ihr Index?

Aufgabe 45 *approximative Orthonormalbasen*

Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_j\}_{j\in J}$. Gegeben sei eine Menge $\{f_j\}_{j\in J} \subset H$ mit $f_k \notin \overline{\operatorname{span}\{f_j : j \neq k\}}$ für alle $k \in J$ und $\sum_{j\in J} \|e_j - f_j\|^2 < \infty$.
Zeigen Sie, dass jedes $x \in H$ eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{j\in J} a_j f_j$ mit $\sum_{j\in J} |a_j|^2 < \infty$ besitzt.

Hinweis: Die Abbildung $B : H \to H$, $\sum_{j\in J} a_j e_j \mapsto \sum_{j\in J} a_j f_j$, *erfüllt* $B - \mathrm{Id} \in \mathcal{K}(H)$, $\ker B = \{0\}$ *und somit* $\operatorname{Bild} B = H$.