Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein 24.11.2009

8. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 35 *Punktauswertungen in Bergmannräumen*
Betrachten Sie den Bergmannraum A^p, $1 \leq p < \infty$, aller holomorphen Funktionen f auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ mit

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \; \mathrm{d}z \; \mathrm{d}\bar{z} \right)^{1/p} < \infty.$$

A^p ist ein Banachraum. Seien $z_0 \in \mathbb{D}$ und $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $f \mapsto \partial_z^n f(z_0)$ ein stetiges lineares Funktional auf A^p definiert. Ist diese Abbildung sogar kompakt?

Hinweis: Cauchyscher Integralsatz.

Aufgabe 36
Sei $\mathcal{K} \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ definiert durch $\mathcal{K}f = \int_0^1 k(\cdot, s)\; f(s)\; ds$, wobei

$$k(s,t) = \begin{cases} t(1-s), & s \geq t, \\ s(1-t), & s < t. \end{cases}$$

Man zeige:

a) $\mathcal{K}$ ist kompakt und selbstadjungiert.

b) Ist f eine Eigenfunktion von $\mathcal{K}$, so ist $f \in C^\infty(0,1)$, $f(0) = f(1) = 0$ und es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'' + \lambda^2 f = 0$.

c) $\sigma(\mathcal{K}) = \{(n\pi)^{-2} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, und alle Eigenräume sind eindimensional.

d) Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Aufgabe 37 *Fitting–Zerlegung*
Es seien $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $S = \lambda \mathrm{Id} - T$. Man zeige:

a) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\ker S^n = \ker S^{n+1}$.

Sei n_0 die kleinste natürliche Zahl mit obiger Eigenschaft.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $\ker S^{n_0} = \ker S^{n_0+k}$ und $\ker S^{n_0}$ is endlichdimensional.

c) Bild S^{n_0} ist abgeschlossen und $X = \text{Bild } S^{n_0} \oplus \ker S^{n_0}$.

d) $S^{n_0} : \text{Bild } S^{n_0} \to \text{Bild } S^{n_0}$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 38 *ein kompakter Operator ohne Eigenwerte*
Seien $S, D \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ definiert durch $S(x_1, x_2, x_3 \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ und $D(x_1, x_2, x_3 \dots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$. Man zeige: $S \circ D$ ist kompakt, besitzt jedoch keinen Eigenwert.

Aufgabe 39 *approximative Eigenwerte*

Es seien $A \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \sigma(A)$ und $(\lambda - A)X$ dicht in X. Man zeige: Es gibt eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\|_X = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|Ax_n - \lambda x_n\|_X \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 40 *schwache und schwach–* Stetigkeit*

Es seien X, Y normierte Räume und $f : X \to Y$ stetig. Beweisen Sie:

a) Es ist $(X', \sigma(X, X'))' = X'$.

b) Die adjungierte Abbildung $f' : (Y', \sigma(Y', Y'')) \to (X', \sigma(X', X''))$ ist stetig.

c) Sind X, Y reflexiv, so ist $f' : (Y', \sigma(Y', Y)) \to (X', \sigma(X', X))$ genau dann stetig, wenn $f' : (Y', \sigma(Y', Y'')) \to (X', \sigma(X', X''))$ stetig ist.