Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

17.11.2009

7. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Sei H ein Hilbertraum mit einer abzählbaren Orthonormalbasis. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt *Hilbert–Schmidt–Operator*, falls eine Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von H mit $\|A\|_{HS}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$ existiert. Der Raum aller Hilbert–Schmidt–Operatoren wird mit $\mathcal{L}_2(H)$ bezeichnet.

Hinweis: Die grundlegenden Eigenschaften von Orthonormalbasen eines Hilbertraums, wie z.B. die Parsevalsche Gleichung, sind für alle folgenden Aufgaben wichtig.

Aufgabe 31 *Hilbert–Schmidt–Operatoren I – Grundlegende Eigenschaften*
Man zeige:

a) Sind $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von H, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|A^* f_n\|^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Af_n\|^2$. Insbesondere hängt $\|A\|_{HS}$ nicht von der Wahl der Orthonormalbasis ab.

b) Es gilt $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H)} \le \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2(H)}$. Insbesondere ist $\mathcal{L}_2(H) \subset \mathcal{L}(H)$ abgeschlossen.

c) Sind $B \in \mathcal{L}(H)$ und $A \in \mathcal{L}_2(H)$, so sind $AB, BA \in \mathcal{L}_2(H)$. Hilbert–Schmidt–Operatoren bilden also ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(H)$.

d) Für $N \in \mathbb{N}$ sei $A_N \in \mathcal{L}(H)$ definiert durch $A_N x = \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle Ae_n$. Ist $A \in \mathcal{L}_2(H)$, so gilt $\|A_N - A\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0$ für $N \to \infty$, und somit ist A kompakt.

Aufgabe 32 *Hilbert–Schmidt–Operatoren II – Beispiele*
Man zeige:

a) Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ in der Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diagonal, d.h. existieren $\lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $Ae_n = \lambda_n e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $A \in \mathcal{L}_2(H) \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. Geben Sie einen kompakten Operator an, der nicht Hilbert–Schmidt ist!

b) Es sei $k \in L^2([0,1]^2)$ und $\mathcal{K} \in \mathcal{L}(L^2([0,1])$ definiert durch $f \mapsto \int_0^1 k(\cdot, y)\; f(y)\; dy$. Man zeige $\mathcal{K} \in \mathcal{L}_2(L^2([0,1]))$ und $\|\mathcal{K}\|_{HS}^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(x,y)|^2\; dx\; dy$.

Hinweis: Verwenden Sie in Teil b) lieber keine konkreten Funktionen als Orthonormalbasis von $L^2([0,1]^2)$!
Anmerkung: Es gilt auch die Umkehrung: Jeder Hilbert–Schmidt–Operator auf $L^2([0,1])$, oder auf $L^2(X,\mu)$, ist ein Integraloperator mit quadratintegrierbarem Kern.

Aufgabe 33 *Hilbert–Schmidt–Operatoren III – Hilbertraumstruktur*
Sei $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS} : \mathcal{L}_2(H) \times \mathcal{L}_2(H) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\langle A, B\rangle_{HS} := \sum_{n=0}^{\infty} \langle Ae_n, Be_n\rangle$. Man zeige:

a) $\langle A, B\rangle_{HS}$ ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis.

b) $(\mathcal{L}_2(H), \langle\cdot,\cdot\rangle_{HS})$ ist ein Hilbertraum.

Hinweis: In Teil b) ist insbesondere die Vollständigkeit von $\mathcal{L}_2(H)$ zu zeigen. Dabei helfen evtl. 32a/b.

Aufgabe 34 *Hilbert–Schmidt–Operatoren IV – Tensorprodukte von Hilberträumen*
Sind H, K Hilberträume, so definiert

$$\left\langle \sum_{i=0}^{N} h_i \otimes k_i, \sum_{j=0}^{M} h'_j \otimes k'_j \right\rangle := \sum_{i,j} \langle h_i, h'_j\rangle_H \ \langle k_i, k'_j\rangle_K \qquad (h_i, h'_i \in H,\ k_i, k'_i \in K)$$

eine Prähilbertraumstruktur auf dem (aus der Linearen Algebra bekannten) Tensorprodukt $H \otimes K$, und $H\widehat{\otimes}K$ bezeichne die Vervollständigung von $H \otimes K$. Sind $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von H bzw. K, so ist $\{e_n \otimes f_m\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $H\widehat{\otimes}K$. Wie üblich sei H' der zu H duale Hilbertraum mit der dualen Orthonormalbasis $e_n^* := \langle\cdot, e_n\rangle$. Zeigen Sie:

Die Abbildung

$$I : H'\widehat{\otimes}H \to \mathcal{L}_2(H), \quad I\left(\sum_{n,m} a_{nm}\ e_n^* \otimes e_m\right) x = \sum_{n,m} a_{nm} e_n^*(x)\ e_m \quad (x \in H),$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus.

Hinweis: Die Isometrie sollte einfach sein. Die Surjektivität folgt aus der Dichtheit der Operatoren $x \mapsto \sum_{n,m} a_{nm} e_n^*(x)\ e_m$ *mit endlichdimensionalem Bild in* $\mathcal{L}_2(H)$.