Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

10.11.2009

# 6. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

**Aufgabe 31** *Schwache Konvergenz in Hilberträumen*

Sei $H$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ die kanonische Norm. Zeigen Sie, dass eine Folge $x_n \in H$ genau dann bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ gegen $x \in H$ konvergiert, wenn $\|x_n\|$ gegen $\|x\|$ und für alle $y \in H$ $\langle y, x_n\rangle$ gegen $\langle y, x\rangle$ konvergieren.

**Aufgabe 32** *Approximationssatz von Runge*

Es sei $\Omega$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$. Die folgenden Teilaufgaben zeigen, dass sich jede holomorphe Funktion $f$ auf $\Omega$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen beliebig genau durch Polynome approximieren lässt. Beweisen Sie also für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$:

a) $f$ lässt sich auf $K$ gleichmäßig durch Linearkombinationen von $(z-\cdot)^{-1}$, $z \notin K$, approximieren.

b) Ist $|z| > \max_{w\in K} |w|$, so lässt sich $(z-\cdot)^{-1}$ auf $K$ gleichmässig durch Polynome approximieren.

Sei $K$ zusätzlich einfach zusammenhängend, d.h. $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend. Zeigen Sie:

c) Ist $\ell \in C(K)'$ und $\ell(p) = 0$ für jedes Polynom $p$, so gilt $\ell((z-\cdot)^{-1}) = 0$ für alle $z \notin K$.

d) Ist $z \notin K$, so lässt sich $(z-\cdot)^{-1}$ auf $K$ gleichmässig durch Polynome approximieren.

**Aufgabe 33** *Überbestimmte Gleichungssysteme*

Es seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ gegeben und $m > n$. Gesucht ist eine approximative Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ der Gleichung $Ax = b$. Zeigen Sie, dass der quadratische Fehler $\|b - Ax\|_2$ von einem eindeutigen $x \in \mathbb{K}^n$ mit minimaler Norm $\|x\|_2$ minimiert wird. Diese “Lösung” $x$ berechnet sich als eindeutige Lösung der Normalengleichung $A^T Ax = A^T b$ in $(\ker A)^\perp$.

*Hinweis: Für die Existenz einer Lösung benötigen Sie ein $y$ im Bild von $A$, so dass $\|b-y\|_2$ minimal ist.*

**Aufgabe 34** *Multiplikationsoperatoren*

a) Es sei $\phi \in C(\mathbb{R})$ beschränkt und $M_\phi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ der Multiplikationsoperator $f \mapsto \phi f$. Man zeige: $M_\phi$ ist invertierbar genau dann, wenn $\phi^{-1}$ eine beschränkte Funktion ist. Was ist $\sigma(M_\phi)$? Berechnen Sie auch die Polarzerlegung von $M_\phi$ sowie $(M_\phi^* M_\phi)^{1/2}$.

b) Beantworten Sie alle Fragen aus Teil a), wenn $(X, \mu)$ ein $\sigma$–endlicher Maßraum, $\phi \in L^\infty(X, \mu)$ und $M_\phi : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ durch $f \mapsto \phi f$ definiert ist.

**Aufgabe 35**

a) Es seien $A$, $B$ stetige normale Operatoren auf einem Hilbertraum und $B^*A = AB^*$. Zeigen Sie, dass für alle $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ $\mu A + \lambda B$ normal ist.

b) Sei $A$ ein stetiger linearer Operator auf einem Hilbertraum. Man zeige $\|A\| = (\sup\ \sigma(A^*A))^{1/2}$.

c) Betrachten Sie $S^1$ als Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ von $\mathbb{C}$. Geben Sie einen Isomorphismus von $L^2(S^1)$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ an und stellen Sie den Multiplikationsoperator $M : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, $(Mf)(z) = (z^2 + 1)f(z)$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ durch eine unendliche Matrix dar.