Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

3.11.2009

5. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 25 *Schurtest für Integraloperatoren*

Es seien (X,μ), (Y,ν) Maßräume und $k : X\times Y \to \mathbb{C}$ meßbar. Wir betrachten den durch $f \mapsto \int_Y k(\cdot,y)\ f(y)\ \mathrm{d}\nu(y)$ definierten Integraloperator $\mathcal{K}$ als Abbildung zwischen L^p–Räumen.

a) Ist $\sup_{x,y}|k(x,y)| < \infty$, so ist $\mathcal{K}$ stetig von $L^1(Y,\nu)$ nach $L^\infty(X,\mu)$.

b) Ist $\int_{X\times Y}|k(x,y)|\ \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) < \infty$, so ist $\mathcal{K}$ stetig von $L^\infty(Y,\nu)$ nach $L^1(X,\mu)$.

c) Ist $\sup_x \int_Y |k(x,y)|\ \mathrm{d}\nu(y) < \infty$, so ist $\mathcal{K}$ stetig von $L^\infty(Y,\nu)$ nach $L^\infty(X,\mu)$.

d) Ist $\sup_y \int_X |k(x,y)|\ \mathrm{d}\mu(x) < \infty$, so ist $\mathcal{K}$ stetig von $L^1(Y,\nu)$ nach $L^1(X,\mu)$.

e) Sind $\sup_x \int_Y |k(x,y)|\ \mathrm{d}\nu(y) < \infty$ und $\sup_y \int_X |k(x,y)|\ \mathrm{d}\mu(x) < \infty$, so ist $\mathcal{K}$ stetig von $L^2(Y,\nu)$ nach $L^2(X,\mu)$.

Aufgabe 26 *Integralgleichungen*

Es seien $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ und $k : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die *Fredholmsche Integralgleichung*

$$f(x) = g(x) + \int_a^b k(x,y)\ f(y)\ \mathrm{d}y$$

im Fall $\max_{x\in[a,b]}\int_a^b |k(x,y)|\ \mathrm{d}y < 1$ genau eine auf $[a,b]$ stetige Lösung besitzt. Berechnen Sie diese Lösung im Fall $[a,b]=[0,1]$, $k(x,y)=2xy$, $g(x)=\sin(\pi x)$.

Hinweis: In einem Banachraum können Sie Gleichungen der Gestalt $(\mathrm{Id}-\mathcal{K})f = g$, $\|\mathcal{K}\| < 1$, *mit der Neumannreihe* $(\mathrm{Id}-\mathcal{K})^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \mathcal{K}^n$ *lösen.*

Aufgabe 27 *Bairescher Kategoriensatz*

Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gibt, die genau in den rationalen Zahlen stetig ist.

Hinweis: Ist f eine solche Funktion, so gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R} : \forall\delta>0\ \exists y\in B_\delta(x) : |f(x)-f(y)| \geq \frac{1}{n}\}\cup\mathbb{Q}$.

Aufgabe 28 *Bidualraum*

Es sei X ein normierter Raum, X' sein Dualraum und $X'' = (X')'$. Zu gegebenem $x\in X$ betrachten Sie die Abbildung $i_x : X'\to\mathbb{K}$, $i_x(x') = x'(x)$. Man beweise, dass $i : X\to X''$, $x\mapsto i_x$, eine lineare Isometrie definiert. Folgern Sie, dass jeder normierte Raum isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Banachraums ist.

Aufgabe 29 *Divergenz der Fourierreihen stetiger Funktionen*

Es sei $C_{2\pi}$ der Banachraum der 2π–periodischen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Maximumsnorm $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|$. Die Fourierreihe $s_\infty(f,x)$ von $f\in C_{2\pi}$ ist die Entwicklung von f bezüglich der Orthonormalbasis

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\ :\ k\in\mathbb{N}_{>0}\right\}$$

von $L^2(-\pi,\pi)$. Im Folgenden zeigen Sie, dass die Folge der $(2n+1)$–ten Partialsummen,

$$s_n(f,x) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\cdot) \right\rangle_{L^2} + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\cdot) \right\rangle_{L^2} \right\},$$

für $f \in C_{2\pi}$ i.A. nicht punktweise konvergiert. Dazu zeige man:

a) $s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \, \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{2\sin(\frac{y}{2})} \, \mathrm{d}y$.

b) $s_n(\cdot,0)$ ist ein stetiges lineares Funktional auf $C_{2\pi}$ und $\sup_{n>0} \|s_n(\cdot,0)\|_{\mathcal{L}(C_{2\pi},\mathbb{C})} = \infty$.

c) Es gibt ein $f \in C_{2\pi}$, für das die Folge $\{s_n(f,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 30 *Orthogonalbasen von L^2*

a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und eine fast überall von 0 verschiedene, integrierbare Funktion, die auf I $|f(x)| < Ce^{-\delta|x|}$ für ein $\delta > 0$ erfüllt. Beweisen Sie, dass $\operatorname{span}\{x^n f : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $L^2(I)$ ist.

Hinweis: Zu zeigen ist, dass $g \in L^2(I)$ und $\langle x^n f, g\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $g = 0$ impliziert. Betrachten Sie hierzu die analytische Funktion $F(x) := \int_I e^{-ixy} f(y)\overline{g(y)} \, \mathrm{d}y$.

b) Folgern Sie, dass die Hermiteschen Funktionen $\{H_n(x)e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}$, mit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}$, eine Orthogonalbasis des $L^2(\mathbb{R})$ bilden.