Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

27.10.2009

4. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 20 *Endlichdimensionale Vektorräume I*

Die folgende Aufgabe zeigt, dass es bis auf Homöomorphie nur einen einzigen n–dimensionalen Hausdorffschen topologischen Vektorraum gibt.

a) Finden Sie einen n–dimensionalen topologischen Vektorraum, der *nicht* homöomorph zum $\mathbb{K}^n$ mit der üblichen Topologie ist.

Es seien X ein hausdorffscher topologischer Vektorraum und $T : \mathbb{K}^n \to X$ eine lineare Abbildung.
b) Zeigen Sie: T ist stetig.

c) Sei T zusätzlich injektiv. Man zeige, dass T ein Homöomorphismus auf sein Bild $T(\mathbb{K}^n)$ ist. Schließen Sie weiterhin, dass $T(\mathbb{K}^n)$ abgeschlossen ist (und damit auch jeder n–dimensionale Unterraum von X).

Hinweis zu c): Rechnen Sie die Stetigkeit von T^{-1} in 0 direkt nach!

Aufgabe 21 *Endlichdimensionale Vektorräume II*

Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Beweisen Sie: Jeder lokalkompakte Hausdorffsche topologische Vektorraum X ist homöomorph zu $\mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Überdecken Sie eine kompakte Nullumgebung $\overline{V}$ mit Translaten $x_j + \frac{1}{2}V$, und betrachten Sie den von den x_j aufgespannten Unterraum von X. Weiterhin gilt für alle Teilmengen $W \subset X$, dass $\overline{W} = \bigcap_{t>0}(W + tV)$ (warum?).

Aufgabe 22 *Endlichdimensionale Vektorräume III: Rieszsches Lemma*

a) Sei Y ein abgeschlossener echter Unterraum eines normierten Raums X. Zeigen Sie: Zu beliebigem $\delta \in (0, 1)$ gibt es ein $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$, so dass für alle $y \in Y$, $\|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta$.

b) Zeigen Sie mit a) nochmals, dass jeder normierte lokalkompakte Raum endlichdimensional ist.

Aufgabe 23 *Endlichdimensionale Vektorräume IV: Topologische Komplemente*

Sei X ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum und Y ein abgeschlossener Unterraum von X mit $\dim X/Y < \infty$. Wähle eine Basis $x_1 + Y, \ldots, x_n + Y$ von X/Y, und definiere $\phi : X/Y \to X$ durch $\phi(\sum_i \alpha_i(x_i + Y)) = \sum_i \alpha_i x_i$. Definiere weiterhin $q : X \to X$ als Komposition von $X \to X/Y$ und ϕ, und setze $p = \mathrm{Id}_X - q$. Beweisen Sie:

a) Die Abbildung ϕ ist ein Homöomorphismus von X/Y auf span $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

b) Die Abbildung p ist stetig, offen (bildet offene Mengen auf solche ab) und eine Projektion ($p \circ p = p$).

c) Es gilt $X = Y \oplus \ker p$.

Bemerkung: Da Y abgeschlossen ist, ist X/Y wieder Hausdorffsch.

Aufgabe 24 *Funktionalkalkül für Banachalgebren*
Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $A \in \mathcal{A}$. Definiere $R(\lambda) := (\lambda e - A)^{-1}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Sei f holomorph auf $\Omega \supset \sigma(A)$. Definiere

$$f(A) := \int_{\mathcal{C}} R(\lambda)\ f(\lambda) \mathrm{d}\lambda,$$

wobei $\mathcal{C}$ ein Weg in $\Omega \setminus \sigma(A)$ ist, der $\sigma(A)$ genau einmal und $\mathbb{C} \setminus \Omega$ nicht umläuft. Man zeige mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes:

a) Die Definition ist unabhängig von der Wahl des Weges $\mathcal{C}$.

b) Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ ein Polynom, so ist $f(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$.

c) Die Abbildung $f \mapsto f(A)$ definiert einen Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{O}(\Omega)$ nach $\mathcal{A}$.

Hinweis: Es gilt $(\mu e - A)^{-1} - (\lambda e - A)^{-1} = (\lambda - \mu)\ (\lambda e - A)^{-1}\ (\mu e - A)^{-1}$.