Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

20.10.2009

3. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 14 *Stetigkeit in* 0
Es seien X, Y topologische Vektorräume und $T : X \to Y$ linear und stetig in 0, d.h. das Urbild jeder offenen Nullumgebung sei offen. Beweisen Sie, dass T stetig ist.

Aufgabe 15 *Beschränkte Mengen und Abbildungen*
Eine Teilmenge B eines topologischen Vektorraums X heißt *beschränkt*, wenn es für jede Nullumgebung V in X eine Zahl t gibt, so dass $B \subset tV$. Man zeige:

a) Quasikompakte Teilmengen sind beschränkt.

b) Ist B beschränkt, so auch $B + B$.

c) Konvergente Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sind beschränkt.

Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ topologischer Vektorräume heißt *beschränkt*, wenn T beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.

d) Stetige lineare Abbildungen sind beschränkt.

e) Es existiere eine translationsinvariante Metrik d auf X, die die Topologie von X induziert. Dann ist T stetig $\Leftrightarrow$ T beschränkt.

Hinweis zu e): Indirekt!

Aufgabe 16 *Folgenräume*
a) Es sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass der Raum $\ell^p(\mathbb{N}) := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_n |x_n|^p < \infty\}$ der zur p–ten Potenz summierbaren Folgen mit der Norm $\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p := (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$ ein Banachraum ist.

b) Zeigen Sie, dass der Raum c_0 aller gegen Null konvergenten Folgen mit der Norm $\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \max_n\ |x_n|$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 17 Man finde eine stetige injektive Abbildung $T : c_{00} \subset \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$, deren Fortsetzung auf den Abschluss $\overline{c_{00}} = l^1(\mathbb{N})$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 18 Man beweise, dass $\Pi_{n\in\mathbb{N}}[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ als Teilmenge von $\ell^2(\mathbb{N})$ kompakt ist.

Aufgabe 19 *Vertauschungsrelationen der Quantenmechanik*
Sei $\mathcal{A}$ eine normierte Algebra mit Einselement e. Beweisen Sie, dass es keine $p, q \in \mathcal{A}$ mit $pq - qp = e$ gibt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $pq^{n+1} - q^{n+1}p = (n+1)q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.