Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

13.10.2009

2. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 9 *Diracfolgen und der Approximationssatz von Weierstraß*
Eine *Diracfolge* ist eine Folge $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(i)\ q_n \geq 0, \quad (ii) \int_{\mathbb{R}} q_n(x)\ \mathrm{d}x = 1, \quad (iii)\ \forall \varepsilon, \delta > 0\ \exists n_0\ \forall N > n_0 : \int_{|x|>\delta} q_n(x)\ \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

a) Sei $\{q_n\}$ eine Diracfolge, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, und $f_n(y) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\ q_n(x-y)\ \mathrm{d}y$. Zeige: $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$.

b) Sei $\{q_n\}$ eine Diracfolge, $f \in C(\mathbb{R})$ beschränkt und $f_n(y) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\ q_n(x-y)\ \mathrm{d}y$. Man beweise $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ gleichmäßig auf Kompakta.

c) Sei $f \in C([0,1])$ beschränkt. Basteln Sie mit Hilfe der Funktionen $e^{-nx^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ (-x^2)^k\right)^n$ eine Diracfolge, so dass $f_n(y) := \int_0^1 f(y)\ q_n(x-y)\ \mathrm{d}y$ ein Polynom ist. Beweisen Sie, dass der Unterraum der Polynome dicht in $C([0,1])$ ist.

Aufgabe 10
a) Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Beweisen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ vollständig ist.

b) Es sei X ein quasi-kompakter topologischer Raum. Man zeige, dass jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ quasi-kompakt ist. Ist X Hausdorffsch, so gilt auch die Umkehrung.

c) Es seien X, Y quasi-kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Man zeige, dass f ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

Aufgabe 11 Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, falls X keine Vereinigung zweier disjunkter, nicht-leerer offener Teilmengen ist. X heißt *wegzusammenhängend*, falls für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $f_{x,y} : [0,1] \to X$ mit $f_{x,y}(0) = x$ und $f_{x,y}(1) = y$ existiert.

a) Es seien $A \subset X$ zusammenhängend und $f : X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(A)$ zusammenhängend ist.

b) Man zeige, dass jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist.

c) Nicht jeder zusammenhängende Raum ist auch wegzusammenhängend. Finden Sie ein Gegenbeispiel!

Aufgabe 12 Das Produkt $X := \Pi_{x\in\mathbb{R}} S^1$ unendlich vieler Kreise sei mit der Produkttopologie aus Aufgabe 8 versehen. Zeigen Sie, dass X kompakt, aber nicht folgenkompakt ist.

Aufgabe 13 Eine *Halbnorm* auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum X ist eine Funktion $p : X \to [0, \infty)$ mit $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ und $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Ist $\mathcal{P}$ eine Familie von Halbnormen auf X, so definieren die Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Translaten der Mengen

$$V(p, \epsilon) := \{x \in X : p(x) < \epsilon\} \quad (\epsilon > 0, p \in \mathcal{P})$$

eine Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ auf X. Man zeige:

a) Die offenen Mengen $V(p, \epsilon)$ sind konvex, d.h. für alle $x, y \in V(p, \epsilon)$ und $t \in [0, 1]$ ist $tx + (1 - t)y \in V(p, \epsilon)$. Weiterhin ist $\{\lambda x : |\lambda| \leq 1, x \in V(p, \epsilon)\} \subset V(p, \epsilon)$.

b) $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ ist ein topologischer Vektorraum.

c) Die Abbildungen $p \in \mathcal{P}$ sind stetig.

d) Ist $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ abzählbar, so erzeugt die Halbmetrik

$$d(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)}$$

die Topologie von $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$. Existiert zu jedem $x \in X \setminus \{0\}$ ein $p_j \in \mathcal{P}$ mit $p_j(x) > 0$, so ist d eine Metrik.

e) Betrachten Sie die Familie $p_n(f) := \sup_{x \in [-n,n]} |f(x)|$ von Halbnormen auf dem Raum der stetigen Funktionen $C(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die von $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definierte Topologie mit der kompakt–offenen Topologie aus Aufgabe 7 übereinstimmt und von einer Metrik induziert wird.