Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

21.1.2010

12. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 54 *Pathologien und adjungierte Operatoren*

a) Seien A, B unbeschränkte lineare Operatoren auf einem Hilbertraum H, so dass AB dicht definiert ist. Man zeige $A^*B^* \subset (BA)^*$ und, falls $B \in \mathcal{L}(H)$, $A^*B^* = (BA)^*$.

b) Für eine Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $H = L^2(\mathbb{R})$ betrachte man den Operator $A : C_c(\mathbb{R}) \subset H \to H$, $Af = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)e_n$. Sei $0 \neq g \in H$. Man zeige, dass $f \mapsto \langle Af, g\rangle$ nicht stetig ist und somit $D(A^*) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 55 *Invertierbarkeit*

Sei $A : D(A) \subset X \to Y$ ein unbeschränkter Operator. Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) A (stetig) invertierbar,
(ii) A ist surjektiv, und es existiert $\gamma > 0$, so dass für alle $x \in D(A)$ $\|Ax\|_Y \geq \gamma\|x\|_X$,
(iii) A ist abgeschlossen, $\overline{\text{Bild} A} = Y$, und es existiert $\gamma > 0$, so dass für alle $x \in D(A)$ $\|Ax\|_Y \geq \gamma\|x\|_X$,
(iv) A ist abgeschlossen und bijektiv.

Folgern Sie im Fall $X = Y$, dass ein unbeschränkter Operator mit $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 56 *Spektralsatz für den Translationsoperator*

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, definiert durch $\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$, ist ein isometrischer Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R})$. Sei $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $Tf(x) = f(x + t)$.

a) Zeige $\mathcal{F}Tf(x) = \tau(x)\mathcal{F}f(x)$ für ein $\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wie sieht der Spektralsatz für T also konkret aus?

b) Bestimmen Sie $\sigma(T)$.

Aufgabe 57 *Eigenschaften der Resolvente und ihre Anwendungen*

Sei $A : D(A) \subset H \to H$ ein unbeschränkter Operator auf einem Hilbertraum H. Man zeige:

a) Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt $(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$.

b) $\lambda \in \rho(A)$ genau dann, wenn $(\mu - \lambda)^{-1} \in \rho((\mu - A)^{-1})$ für ein $\mu \in \rho(A)$.

c) Es sei $(\lambda - A)^{-1}$ für ein $\lambda \in \rho(A)$ kompakt. Dann ist $(\mu - A)^{-1}$ für alle $\mu \in \rho(A)$ kompakt, und $\sigma(A) = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ für eine Folge von Eigenwerten endlicher Vielfachheit mit $|\lambda_k| \to \infty$. Ist A selbstadjungiert, so existiert eine Orthonormalbasis von H aus Eigenvektoren von A.

Aufgabe 58 *Nelson's Gegenbeispiel zu kommutierenden Operatoren*

Wir assoziieren zur Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ eine eindimensionale komplexe (zweidimensionale reelle) Mannigfaltigkeit M wie folgt: Schreibe (f, V) für eine holomorphe Wahl eines Zweiges der Quadratwurzel auf einem Gebiet $V \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und definiere auf der Menge dieser Paare eine Äquivalenzrelation durch $(f, V) \sim (g, W) \Leftrightarrow f = g$ auf $V \cap W \neq \emptyset$. Die Menge der Äquivalenzklassen gibt die gesuchte Mannigfaltigkeit, die Sie sich als "Graph der mehrwertigen Funktion $\sqrt{z}$" oder als zwei zusammengeklebte Kopien von $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ mit den üblichen Koordinaten vorstellen sollten.
Sei $D = C_c^\infty(M)$ und betrachte $A, B : D \subset L^2(M) \to L^2(M)$, $Af = -i\partial_x f$, $Bf = -i\partial_y f$. Man zeige:

a) $A, B : D \to D$, A, B sind symmetrisch, $ABf = BAf$ für alle $f \in D$.

Ohne Beweis dürfen Sie verwenden, dass $\overline{A}$ und $\overline{B}$ selbstadjungiert sind.

b) Geben Sie $e^{i\overline{A}t}$ und $e^{i\overline{B}t}$ explizit an.

c) Wählen Sie den Punkt $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ in einer der beiden Kopien von $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und eine Funktion $f \in D$, die außerhalb einer kleinen Umgebung dieses Punktes verschwindet. Dann ist $e^{i\overline{A}} e^{i\overline{B}} f \neq e^{i\overline{B}} e^{i\overline{A}} f$.