Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

5.1.2010

11. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 52 *Erweiterungen, Selbstadjungiertheit, Spektrum*
Sei $H = L^2([0,1])$ und $A \in \mathcal{L}(H)$ definiert durch $Af(x) = i\int_0^x f(y)\ dy$. Beweisen Sie:

a) A ist injektiv und $Af - A^*f = i\int_0^1 f(y)\ dy\ (f \in H)$.

b) Es ist $C^1([0,1]) \subset \mathcal{D}_1 := \mathrm{Bild}A + \mathbb{C}\ 1 \subset C([0,1])$, und $\mathcal{D}_1$,

$$\mathcal{D}_2 := \{u \in \mathcal{D}_1 : u(0) = u(1)\},\ \mathcal{D}_3 := \{u \in \mathcal{D}_1 : u(0) = u(1) = 0\} \text{ sowie } \mathcal{D}_4 := \{u \in \mathcal{D}_1 : u(1) = 0\}$$

sind dicht in H.

Für $k = 1,2,3,4$ sei D_k der Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_k$, der $u = Af + \alpha\ 1 \in \mathcal{D}_k$ die Funktion $D_k u := f$ zuordnet.

c) D_k ist wohldefiniert und $D_k u = -i\partial_x u$ für alle $u \in C^1([0,1]) \cap \mathcal{D}_k$.

d) Für $u, v \in \mathcal{D}_1$ gilt $\langle D_1 u, v\rangle - \langle u, D_1 v\rangle = -i(u(1)\bar{v}(1) - u(0)\bar{v}(0))$ und somit $D_1 \subset D_3^*$, $D_2 \subset D_2^*$ und $D_3 \subset D_1^*$.

e) D_3 ist symmetrisch, D_2 selbstadjungiert und D_1 eine nicht–symmetrische Erweiterung von D_2.

f) $\sigma(D_1) = \mathbb{C}$ und $\sigma(D_4) = \emptyset$.

g) Sei $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen, $q(x) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}|x - q_k|^{-1/2} \in L^1([0,1])$ und M_q der Multiplikationsoperator $M_q f = qf$ mit Definitionsbereich $D(M_q) := \{f \in H : qf \in H\}$. Man zeige, dass der Definitionsbereich von $D_1 + M_q$ gleich $\{0\}$ ist.

Bemerkung: $\mathcal{D}_1$ ist genau der Raum der absolutstetigen Funktionen, deren Ableitung zu $L^2([0,1])$ gehört.

Aufgabe 53 *abschließbare Operatoren*
Seien X, Y Banachräume und A ein Operator von X nach Y mit Definitionsbereich $D(A)$. Man zeige:

a) $D(A)$ mit Norm $\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ ist ein Banachraum $\Leftrightarrow$ A ist ein abgeschlossener Operator.

b) Sei B ein zu A adjungierter Operator von Y' nach X', d.h. es gelte $\langle By', x\rangle = \langle y', Ax\rangle$ $(x \in D(A), y' \in D(B))$. Ist $D(A)$ dicht in X, so ist B abschließbar. Ist umgekehrt $D(B)$ dicht in Y', so ist A abschließbar.

c) Sind X, Y reflexiv, A abschließbar und $D(A)$ dicht in X, so ist der adjungierte Operator A' abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich und $A'' = \overline{A}$.

d) Sei $Y = X$, A dicht definiert, $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A = \overline{A|_{D(A^n)}}$.

Hinweis: Aus $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$ folgt die Abgeschlossenheit von A.