Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

8.12.2009

10. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Aufgabe 46 *Spektralsatz für kompakte Operatoren*

Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$. Man zeige:

a) Ist A diagonalisierbar, d.h. $Ae_j = \lambda_j e_j$ bzgl. einer Basis $\{e_j\}_{j\in J}$ von H, so ist A genau dann kompakt, wenn $\{\lambda_j\}_{j\in J} \subset c_0(J)$.

b) Ist H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und A normal und kompakt, so besitzt A einen Eigenwert λ mit $|\lambda| = \|A\|$.

c) Unter den Voraussetzungen von b) ist A diagonalisierbar.

Hinweis zu b): Warum ist $x \mapsto |\langle Ax, x\rangle|$ schwach–stetig auf $\{\|x\| \leq 1\}$? Und wann gilt in der Cauchy–Schwarz–Ungleichung Gleichheit?

Aufgabe 47 *schwache Holomorphie*

Es seien X ein Banachraum und $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Nach Vorlesung heißt eine Funktion $f : G \to X$ holomorph, falls der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} \Delta_z f(z_0) := \lim_{z\to z_0}(z - z_0)^{-1}(f(z) - f(z_0))$ für alle $z_0 \in G$ existiert. Sind für alle $x' \in X'$ die $\mathbb{C}$–wertigen Funktionen $x'(f(\cdot))$ holomorph in G, so nennt man f schwach–holomorph.
Man zeige: f ist holomorph $\Leftrightarrow$ f ist schwach–holomorph.

Hinweis zu $\Leftarrow$: Aus Banach–Steinhaus folgt $\|\Delta_z f(z_0) - \Delta_{\tilde{z}} f(z_0)\| \leq C|z - \tilde{z}|$ für kleine $|z - z_0|,\ |\tilde{z} - z_0|$.

Aufgabe 48 *schwacher Abschluss*

Sei H ein unendlich–dimensionaler Hilbertraum.

a) Beweisen Sie, dass der Abschluss der Einheitssphäre $S = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ bezüglich der schwachen Topologie die Einheitskugel $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ ist.

b) Sei M eine schwach–dichte Teilmenge von H. Ist dann auch $M \cap B$ schwach–dicht in B?

Hinweis zu a): Der schwache Abschluss besteht hier aus den Grenzwerten schwach–konvergenter Folgen in S.

Aufgabe 49 *Arzela–Ascoli I*

a) Betrachten Sie den Integraloperator $\mathcal{K} : C([0,1]) \to C([0,1])$, $f \mapsto \int_0^1 k(\cdot, s)\ f(s)\ ds$, für einen stetigen Kern $k \in C([0,1]^2)$. Man zeige, dass $\mathcal{K}$ kompakt ist.

b) Sei nun $k(t,s) = |s - t|^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$. Ist $\mathcal{K}$ weiterhin kompakt?

Bemerkung: In Teil a) können Sie das Intervall $[0,1]$ durch einen mit einem endlichen Borelmaß versehenen kompakten metrischen Raum ersetzen.

Aufgabe 50 *Arzela–Ascoli II – vgl. Aufgabe 35*

Sei $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < r\}$. Betrachten Sie den Raum $A_r = C(\overline{\mathbb{D}_r}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}_r)$ holomorpher Funktionen mit der Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $A_r \subset A_s$ für alle $r > s$ kompakt ist.

Aufgabe 51 *Arzela–Ascoli III – Heine–Borel Eigenschaft*

Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und a_n, b_n zwei streng monoton wachsende bzw. fallende Folgen mit $(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)$. Wir betrachten den Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen $C^\infty(a,b)$ auf (a,b) und versehen ihn wie in Aufgabe 13 mit der von den Halbnormen $p_n(f) := \sup\{|\partial_x^k f(x)| \ : \ k \leq n, \ x \in (a_n, b_n)\}$ induzierten Topologie.

a) Wann ist eine Teilmenge von $C^\infty(a,b)$ beschränkt?

b) Man beweise mit dem Satz von Arzela–Ascoli, dass jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $C^\infty(a,b)$ kompakt ist.

c) Ist $C^\infty(a,b)$ normierbar?

Organisatorisches: Das 11. Übungsblatt gibt es im Januar. Die Übung am 8.1.2010 fällt daher aus.