Institut für Analysis
Universität Hannover
Prof. Dr. B. Krötz, H. Gimperlein

6.10.2009

1. Übungsblatt zur Funktionalanalysis

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ versehen mit der natürlichen Topologie. Ein Vektorraum E über $\mathbb{K}$ heißt *topologischer Vektorraum*, falls E mit einer Topologie $\mathcal{T}$ versehen ist, bezüglich derer die Vektorraumoperationen

$$a : E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x + y, \quad \text{und} \quad m : \mathbb{K} \times E \to E, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

stetig sind.
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorffsch (oder T_2), falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Umgebungen U_x von x und U_y von y existieren mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Aufgabe 1 Sei E ein topologischer Vektorraum. Man zeige:

a) Für jedes $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $x \in E$ ist die affine Transformation

$$\tau_{\lambda,x} : E \to E, \qquad y \mapsto \lambda y + x,$$

ein Homöomorphismus.

b) Zu jeder Nullumgebung U existiert eine Nullumgebung W mit

$$W + W := \{v + w : v, w \in W\} \subset U.$$

c) Sei $D := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$. Zu jeder Nullumgebung U existiert eine Nullumgebung W mit

$$W \subset U \quad \text{und} \quad DW := \{\lambda w : \lambda \in D, w \in W\} = W.$$

d) Für jede Nullumgebung U gilt $\mathbb{K}U = E$.

Aufgabe 2 Man zeige:

a) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist Hausdorffsch $\Leftrightarrow$ $\Delta X := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen.

b) Ein topologischer Vektorraum $(E, \mathcal{T})$ ist Hausdorffsch $\Leftrightarrow$ $\{0\} \subset E$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 3 Seien X, Y topologische Räume. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $f : X \to Y$ ist stetig.
b) Für alle $A \subset X$ gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
c) Für alle abgeschlossenen $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.
d) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

Aufgabe 4 Seien X, Y topologische Räume, X kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Man zeige:

a) $f(X)$ ist kompakt.

b) Ist Y Hausdorffsch und $f : X \to Y$ bijektiv, so ist f^{-1} stetig.

Aufgabe 5 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige:

a) Ist $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine konkave, streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$, so definiert $f \circ d$ ebenfalls eine Metrik auf X.

b) Es gibt eine beschränkte Metrik $\delta : X \times X \to [0, 1]$, die auf X dieselbe Topologie wie d erzeugt.

Aufgabe 6 Sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $F \subset E$ ein Unterraum. Man zeige:

a) F versehen mit der (durch Einschränkung) induzierten Topologie ist ein topologischer Vektorraum.

b) Sei $\mathcal{Q}$ die feinste Topologie auf dem Quotientenraum E/F, bezüglich derer die Quotientenabbildung $\pi : E \to E/F$ stetig ist. Dann ist $(E/F, Q)$ ein topologischer Vektorraum.

Aufgabe 7 Sei $C(\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen. Die *kompakt–offene Topologie* $\mathcal{T}$ sei definiert durch beliebige Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen der Form

$$\{f \in C(\mathbb{R}) : f(K) \subset U\} \qquad (K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}, U \subset \mathbb{K} \text{ offen}).$$

a) Zeigen Sie: Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(\mathbb{R})$ konvergiert bezüglich $\mathcal{T}$ genau dann, wenn f_n auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

b) Es gibt keine Norm $\|\cdot\|$ auf $C(\mathbb{R})$, die die kompakt–offene Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt.

Aufgabe 8 *Satz von Tychonoff*
Gegeben eine Menge A und topologische Räume X_α $(\alpha \in A)$, so versehen wir das cartesische Produkt $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit der gröbsten Topologie, bezüglich derer alle Koordinatenabbildungen $\pi_\alpha : \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha$ stetig sind.

a) Geben Sie die offenen Mengen dieser Topologie an.

b) Es seien A eine endliche Menge und X_α kompakt für alle $\alpha \in A$. Dann ist $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ kompakt.

c) (*Schwierig!*) Beweisen Sie die Aussage aus Teil b) auch für unendliche Mengen A.

Hinweis: Übungsblätter und weitere Informationen zur Vorlesung *Funktionalanalysis* finden Sie unter:

www.analysis.uni-hannover.de/˜gimperlein