Skriptum zu
Maß- und Integrationstheorie

SoSe 2004

Institut für Grundlagen
der Bauingenieurwissenschaften
Arbeitsbereich Technische Mathematik
Baufakultät, Universität Innsbruck

Peter Wagner

21. Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

§ 1 σ-Algebren und Maße 1
§ 2 Integration 8
§ 3 Produktmaße 19

§ 1 σ-Algebren und Maße

Def.:
X Menge, $\mathcal{P}(X) :=$ Potenzmenge von $X = \{A; A \subset X\}$.

1) $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ heißt <u>σ-Algebra</u> $:\Longleftrightarrow$ (i) $\emptyset \in \Sigma$, (ii) $A \in \Sigma \implies X \setminus A \in \Sigma$
   (iii) $A_i \in \Sigma,\ i \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.
   Das Paar (X, Σ) heißt dann <u>Messraum</u>.

2) $(X, \Sigma), (X', \Sigma')$ Messräume.
   $f : X \longrightarrow X'$ heißt <u>messbar</u> $:\Longleftrightarrow \forall A \in \Sigma' : f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Bemerkung Der Durchschnitt beliebig vieler σ-Algebren ist wieder eine.
Wenn $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, so ist daher $\Sigma_{\mathcal{T}} := \bigcap\limits_{\substack{\Sigma\sigma\text{-Alg.} \\ \Sigma \supset \mathcal{T}}} \Sigma$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{T}$ enthält.
$\Sigma_{\mathcal{T}}$ heißt <u>von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra</u>.

Bsp.: 1) $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. $\mathcal{B}(X) := \Sigma_{\mathcal{T}} =$ kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält, heißt <u>Borel-σ-Algebra</u>.
2) $(X_1, X_2), (\Sigma_1, \Sigma_2)$ Messräume, $\Sigma_1 \times \Sigma_2 := \{A_1 \times A_2;\ A_i \in \Sigma_i\}$, $(X_1 \times X_2,\ \Sigma_{\Sigma_1 \times \Sigma_2})$ heißt <u>Produkt</u> der Messräume.
3) (X_i, Σ_i) Messräume, $f : X_1 \longrightarrow X_2,\ g : X_2 \longrightarrow X_3$ messbar $\implies g \circ f$ messbar.

Lemma 1
(X_i, Σ_i) Messräume, $i = 1, 2,\ \Sigma_2 = \Sigma_{\mathcal{T}},\ f : X_1 \longrightarrow X_2$.
Dann gilt: f messbar $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{T} : f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

Beweis: „$\implies$“ klar, „$\Longleftarrow$“: $\Sigma_3 := \{A \in X_2; f^{-1}(A) \in \Sigma_1\}$ ist σ-Algebra, $\mathcal{T} \subset \Sigma_3 \implies \Sigma_2 \subset \Sigma_3 \implies f$ messbar. $\square$

Bsp.: X, Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ stetig $\implies f$ (Borel-)messbar.

Def.:

1) $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \dot\cup \{\infty, -\infty\}$ mit der von $(a, \infty], [-\infty, a),\ a \in \mathbb{R}$, erzeugten Topologie. (Dann ist $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{\infty\},\ A \cup \{-\infty\},\ A \cup \{\pm\infty\};\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.)

2) (X, Σ) sei ein Messraum.
   $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, \Sigma) := \{f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar bzgl. $\Sigma, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\}$.

Lemma 2 (X, Σ) Messraum.

1) $f \in \mathcal{L}(X) \Longleftrightarrow \forall c \in \mathbb{R} : \{x \in X;\ f(x) > c\} \in \Sigma$;

2) $f, g \in \mathcal{L}(X),\ R \in \{<, \leq, =, \neq\} \implies \{x \in X;\ f(x) R g(x)\} \in \Sigma$;

3) $f, g \in \mathcal{L}(X) \implies f \overset{+}{\underset{:}{\cdot}} g \in \mathcal{L}(X)$ falls überall definiert (wobei $c \pm \infty = \pm\infty$ für $c \in \mathbb{R},\ \infty + \infty = \infty$ etc.);

4) $f_k \in \mathcal{L}(X) \implies \sup_k f_k,\ \inf_k f_k,\ \limsup_{k \to \infty} f_k (= \inf_k \sup_{m \geq k} f_m),\ \liminf_{k \to \infty} f_k (= \sup_k \inf_{m \geq k} f_m) \in \mathcal{L}(X)$.

Beweis:

1) nach Lemma 1, da $\{(c, \infty];\ c \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erzeugt;

2) $\{x \in X;\ f(x) < g(x)\} = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} \{x \in X;\ f(x) < c\} \cap \{x \in X;\ g(x) > c\}$ etc.;

3) $\{x \in X;\ f(x) + g(x) > c\} = \bigcup_{d \in \mathbb{Q}} \{x \in X;\ f(x) > d\} \cap \{x \in X;\ g(x) > c - d\}$;

4) $\{x \in X;\ \sup_k f_k(x) > c\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X;\ f_k(x) > c\}$ etc. $\square$

Def.: $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}},\ (X, \Sigma)$ Messraum.

1) $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt <u>(positives) Maß</u> $:\Longleftrightarrow$ (i) $\mu(\emptyset) = 0$ (ii) $A_i \in \Sigma,\ i \in \mathbb{N}$, mit $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mu(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ $\quad (\sum_{i=1}^{\infty} 0 := 0$ etc.)
(X, Σ, μ) heißt dann <u>Maßraum</u>.

2) $A \in \Sigma$ heißt <u>Nullmenge</u> bezüglich $\mu \Longleftrightarrow \mu(A) = 0$.

3) Der Maßraum (X, Σ, μ) heißt <u>vollständig</u> $:\Longleftrightarrow \forall A$ Nullmenge: $\forall B \subset A : B \in \Sigma$.

4) (X, Σ, μ) Maßraum, $Y \in \Sigma$. Dann heißt der Maßraum $\big(Y, \Sigma \cap \mathcal{P}(Y), \underbrace{\mu\big|_{\Sigma \cap \mathcal{P}(Y)}}_{=:\mu|_y}\big)$
<u>Einschränkung</u> von μ auf Y.

Lemma 3
(X, Σ, μ) Maßraum, $A_i \in \Sigma,\ i \in \mathbb{N},\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$.

Beweis:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(A_1\dot\cup(A_2\setminus A_1)\dot\cup(A_3\setminus A_2)\dot\cup\ \cdots\Big) \overset{\substack{\mu \text{ Maß}\\ \downarrow}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i\setminus A_{i-1}) = \lim_{k\to\infty}\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i\setminus A_{i-1})}_{\mu(A_k)},$$

wobei $A_0 := \emptyset$ gesetzt wurde. $\square$

Lemma 4
(X,Σ,μ) Maßraum $\implies \exists_1$ vollständiger Maßraum $(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu})$ mit $\overline{\Sigma}\supset\Sigma$ und $\overline{\mu}\big|_{\Sigma}=\mu$, der minimal ist.

Beweis:
$\overline{\Sigma} := \big\{A\in\mathcal{P}(X);\ \exists A_1,A_2\in\Sigma : A_1\subset A\subset A_2,\ \mu(A_2\setminus A_1)=0\big\}$,
$\overline{\mu} : \overline{\Sigma} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : A \longmapsto \mu(A_1),\ A_i$ wie oben $\square$

Def.: $\overline{\mu}$ wie oben heißt Vervollständigung von μ.

Bsp.: X Menge, $x\in X \implies \delta_x : \mathcal{P}(X)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+ : A\longmapsto\left\{\begin{array}{ccc}1 & : & x\in A\\ 0 & : & x\notin A\end{array}\right\}$ ist ein vollständiges Maß. Es heißt Punktmaß oder Diracmaß.

Satz 1 $\exists_1$ Maß λ auf $\big(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$ mit

$$\forall a_l\le b_l\in\mathbb{R},\ l=1,\cdots,n:\ \lambda\Big(\prod_{l=1}^{n}[a_l,b_l)\Big)=\prod_{l=1}^{n}(b_l-a_l).$$

Def.:
λ heißt Lebesgue-Borelmaß, seine Vervollständigung $\overline{\lambda}=\overline{\mathcal{B}}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ heißt Lebesguemaß.

Beweis von Satz 1

a) $\mathcal{F} := \big\{\prod_{l=1}^{n}[a_l,b_l);\ a_l\le b_l\big\},\ \mathcal{G} := \{\bigcup_{i=1}^{k}A_i;\ A_1,\cdots,A_k\in\mathcal{F}\big\}$.

Dann gilt $\forall A\in\mathcal{G}:\ \exists A_i\in\mathcal{F} : A=\dot\bigcup_{i=1}^{k}A_i$ (d.h. $\forall i\ne j : A_i\cap A_j=\emptyset$) und $\mathcal{G}$ ist ein Ring[1], d.h. $\emptyset\in\mathcal{G},\ A,B\in\mathcal{G} \implies A\cup B,\ A\setminus B\in\mathcal{G}$. (Vgl. Übung 10)

b) $\lambda : \mathcal{G}\longrightarrow\mathbb{R}_+ : A=\dot\bigcup_{i=1}^{k}\underbrace{A_i}_{\in\mathcal{F}}\longmapsto\sum_{i=1}^{k}|A_i|$ ist wohldefiniert

(wobei $\big|\prod_{l=1}^{n}[a_l,b_l)\big|=\prod_{l=1}^{n}(b_l-a_l)$), denn $A=\dot\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\dot\bigcup_{j=1}^{m}B_j$ mit $A_i,B_j\in\mathcal{F}$

[1] hat mit den Ringen der Algebra nichts zu tun

$\Longrightarrow\ A = \dot{\bigcup\limits_{i,j}} A_i \cap B_j$ mit $A_i \cap B_j \in \mathcal{F}$ und daher

$\sum\limits_{i=1}^{k} |A_i| = \sum\limits_i \sum\limits_j |A_i \cap B_j| = \sum\limits_j \sum\limits_i |A_i \cap B_j| = \sum\limits_{j=1}^{m} |B_j|$. (Vgl. Übung 11)

Offenbar gilt

$A \subset B \in \mathcal{G} \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)$ und $A, B \in \mathcal{G},\ A \cap B = \emptyset \implies \lambda(A \dot{\cup} B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

c) $\lambda : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist „σ-additiv“, d.h.

$A = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} A_i,\ A, A_i \in \mathcal{G} \implies \lambda(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$, denn

<u>Annahme:</u> $\delta := \lambda(A) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) > 0$.

$B_k := A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \implies B_{k+1} \subset B_k,\ \lambda(A) = \lambda(B_k) + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda(A_i)$

$\implies \forall k : \lambda(B_k) \geq \delta \implies \exists C_k \in \mathcal{G}$ mit $\overline{C_k} \subset B_k$ und $\lambda(C_k) \geq \lambda(B_k) - 2^{-k}\delta$;

$D_k := C_1 \cap \cdots \cap C_k \overset{\text{induktiv}}{\implies} \lambda(D_k) \overset{\circledast}{\geq} \lambda(B_k) - \delta(1 - 2^{-k})$, denn

$\lambda(D_1) = \lambda(C_1) \geq \lambda(B_1) - \frac{1}{2}\delta$ und wenn $\circledast$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\lambda(D_{k+1}) &= \lambda(D_k \cap C_{k+1}) \\
&= \lambda(D_k) + \lambda(C_{k+1}) - \lambda(\overbrace{D_k \cup C_{k+1}}^{\subset B_k}) \\
&\geq \lambda(B_k) - \delta(1 - 2^{-k}) + \lambda(B_{k+1}) - 2^{-k-1}\delta - \lambda(B_k) \\
&= \lambda(B_{k+1}) - \delta(1 - 2^{-k-1});
\end{aligned}$$

daher ist $\lambda(D_k) \overset{\circledast}{\geq} \lambda(B_k) - \delta(1 - 2^{-k}) \geq \delta - \delta(1 - 2^{-k}) = 2^{-k}\delta$

$\implies D_k \neq \emptyset;\ \overline{D}_{k+1} \subset \overline{D}_k$ kompakt $\implies \bigcap \overline{D}_k \neq \emptyset$

$\implies \bigcap \overline{C}_k \neq \emptyset \implies \bigcap B_k \neq \emptyset \implies \lightning$ zu $A = \bigcup A_i$.

d) Es sei $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : A \longmapsto \inf\big\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i);\ A \subset \bigcup A_i, A_i \in \mathcal{G}\big\}$ und daher auch

$\lambda^*(A) = \inf\big\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |A_i|;\ A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{F}\big\}$.

Dann ist $\lambda^*(\emptyset) = 0$ und $A \subset B \implies \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$; weiters gilt $\lambda^*(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B_i)$ für $B_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, denn $B_i \subset \bigcup\limits_j A_{ij}$ mit $\lambda^*(B_i) \geq \sum\limits_j \lambda(A_{ij}) - 2^{-i}\varepsilon,\ \varepsilon > 0$,

$A_{ij} \in \mathcal{G} \implies \lambda^*(\bigcup\limits_i B_i) \leq \sum\limits_{i,j} \lambda(A_{ij}) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \big[\lambda^*(B_i) + 2^{-i}\varepsilon\big] = \varepsilon + \sum\limits_i \lambda^*(B_i)$.

e) $A \in \mathcal{G} \implies \lambda^*(A) = \lambda(A)$, denn $A = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{k}} A_i, A_i \in \mathcal{F} \implies \lambda^*(A) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} |A_i| = \lambda(A)$ und andererseits $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathcal{G} \implies A = (A \cap A_1)\dot\cup(A \cap A_2 \setminus A_1)\dot\cup \cdots$

$$\implies \sum_i \lambda(A_i) \geq \sum_i \lambda\big(\underbrace{A \cap A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})}_{\in \mathcal{G}}\big) \overset{\text{c)}}{=} \lambda\big(\underbrace{\dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})}_{=A}\big) =$$

$\lambda(A) \implies \lambda^*(A) \geq \lambda(A)$.

Weiters gilt: $A \in \mathcal{G} \implies$

$\boxed{*}\ \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) : \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A)$, denn

$\leq$ gilt allgemein nach d) und $\geq$ folgt aus

$$B \subset \bigcup_i A_i,\ A_i \in \mathcal{G} \implies \sum_i \lambda(A_i) = \sum_i \big[\lambda(\underbrace{A_i \cap A}_{\in \mathcal{G}}) + \lambda(\underbrace{A_i \setminus A}_{\in \mathcal{G}})\big] \geq \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A).$$

f) $\boxed{*}$ gilt auch $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, denn $\mathcal{G}$ erzeugt die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$\mathcal{G} \subset \Sigma := \{A \subset \mathbb{R}^n;\ \boxed{*}\text{ gilt}\}$ und Σ ist eine σ-Algebra, denn

(i) $\emptyset \in \Sigma\ \surd$ (ii) $A \in \Sigma \implies \mathbb{R}^n \setminus A \in \Sigma\ \surd$

(ii)' $A_1, A_2 \in \Sigma,\ B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \implies \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A_1) + \lambda^*(B \setminus A_1)$

$\overset{\circledast}{=} \lambda^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \lambda^*(B \cap A_1 \setminus A_2) + \lambda^*(B \cap A_2 \setminus A_1) + \lambda^*\big(B \setminus (A_1 \cup A_2)\big)$

$$\implies \lambda^*\big(\underbrace{B \cap (A_1 \cup A_2)}_{\tilde{B}}\big) \overset{\circledast \text{ für } \tilde{B}}{=} \lambda^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \lambda^*(B \cap A_1 \setminus A_2) + \lambda^*(B \cap A_2 \setminus A_1) + \underbrace{\lambda^*(\emptyset)}_{0}$$

$$\implies \lambda^*(B) \overset{\circledast}{=} \lambda^*\big(B \cap (A_1 \cup A_2)\big) + \lambda^*\big(B \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \implies A_1 \cup A_2 \in \Sigma$$

(iii) $A_i \in \Sigma \overset{\text{(ii),(ii)'}}{\implies} A_1' := A_1,\ A_2' := A_2 \setminus A_1 \left(= \mathbb{R}^n \setminus \big(A_1 \cup (\mathbb{R}^n \setminus A_2)\big)\right)$,

$A_3' = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots \in \Sigma$ und $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A_1') + \underbrace{\lambda^*(B \setminus A_1')}_{= \lambda^*(B \cap A_2') + \lambda^*\big(B \setminus (A_1' \cup A_2')\big)}$$

etc.

$$\implies \lambda^*(B) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda^*(B \cap A_i') + \lambda^*(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'),\ \forall k$$

$$\implies \lambda^*(B) \underset{\boxed{\circledast}}{\geq} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(B \cap A_i')}_{\underset{\text{d)}}{\geq} \lambda^*(B \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'}_{= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i})} + \lambda^*(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

und andererseits nach d) gilt allgemein

$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap \bigcup A_i) + \lambda^*(B \setminus \bigcup A_i)$, d.h. also

$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap \bigcup A_i) + \lambda^*(B \setminus \bigcup A_i) \implies \bigcup\limits_i A_i \in \Sigma.$

g) $\lambda = \lambda^*\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ ist ein Maß, denn $A = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} A_i$ mit $A_i, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \implies \lambda^*(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i)$, denn $\leq$ gilt allgemein nach d) und $\geq$ gilt nach $\boxed{\circledast}$ in f), wenn $B = A$, weil A_i disjunkt $\implies A_i' = A_i$.

h) Eindeutigkeit: $\tilde{\lambda}$ sei ein zweites Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{\lambda}\big|_{\mathcal{F}} = \lambda\big|_{\mathcal{F}}$;

nach b) ist dann $\tilde{\lambda}\big|_{\mathcal{G}} = \lambda\big|_{\mathcal{G}}$;

weiters ist $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \tilde{\lambda}(A) \leq \lambda(A)$, denn

$A \subset \bigcup A_i,\ A_i \in \mathcal{G} \implies \tilde{\lambda}(A) \leq \tilde{\lambda}(\bigcup A_i) = \tilde{\lambda}\big(\dot{\bigcup\limits_{i=1}} A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})\big)$

$= \sum\limits_i \tilde{\lambda}\big(A_1 \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})\big) \leq \sum\limits_i \tilde{\lambda}(A_i) = \sum \lambda(A_i)$

$\implies \tilde{\lambda}(A) \leq \inf\limits_{\substack{A \subset \bigcup A_i \\ A_i \in \mathcal{G}}} \sum\limits_i \lambda(A_i) = \lambda^*(A) = \lambda(A).$

Wenn $B_N := [-N, N)^n \in \mathcal{F},\ N \in \mathbb{N}$ fest, so ist für

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : (2N)^n = \tilde{\lambda}(B_N) = \tilde{\lambda}(A \cap B_N) + \tilde{\lambda}(B_N \setminus A)$$
$$\underbrace{\overset{|\wedge}{\lambda(A \cap B_N)} \qquad \overset{|\wedge}{\lambda(B_N \setminus A)}}_{(2N)^n}$$

$\implies \tilde{\lambda}(A \cap B_N) = \lambda(A \cap B_N)$ und daher

$\tilde{\lambda}(A) \underset{\text{Lemma 3}}{=} \lim\limits_{N \to \infty} \tilde{\lambda}(A \cap B_N) = \lim\limits_{N \to \infty} \lambda(A \cap B_N) = \lambda(A).$ $\square$

Bemerkungen 1) Der Beweisteil d) – g) zeigt, dass ein „Prämaß" μ auf einem Ring $\mathcal{G}$, d.h. $\mu : \mathcal{G} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\dot{\bigcup\limits_i} A_i) = \sum\limits_i \mu(A_i)$, immer eine Fortsetzung zu einem Maß μ auf $\Sigma_{\mathcal{G}}$ erlaubt. Wenn μ „σ- endlich" ist, d.h. $\exists B_N \in \mathcal{G}$ mit $\bigcup\limits_N B_N = X$ und $\forall N : \mu(B_N) < \infty$, so zeigt h), dass diese Fortsetzung eindeutig ist.

2) Nach d) gilt für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\lambda(A) = \inf\big\{\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|;\ A \subset \bigcup_i A_i,\ A_i \in \mathcal{F}\big\}.$$

Speziell ist A Lebesgue-Nullmenge: $\overset{\text{(vgl. S. 2)}}{\Longleftrightarrow} A \in \overline{\mathcal{B}},\ \overline{\lambda}(A) = 0 \overset{\text{Lemma 4}}{\Longleftrightarrow} A \subset B,\ B \in \mathcal{B}$, $\lambda(B) = 0 \Longleftrightarrow^{2} \forall \varepsilon > 0 :\ \exists$ Intervalle $R_i = \prod_{l=1}^{n} [a_l, b_l] : A \subset \bigcup_i R_i$ und $\sum_i |R_i| < \varepsilon$, vgl. Skriptum Analysis 3, S. 17.

Außerdem gilt (vgl. Analysis 3, S. 22) D quadrierbar $\Longleftrightarrow \partial D$ Lebesgue-Nullmenge $\Longrightarrow D = \mathring{D} \cup (D \cap \partial D) \in \overline{\mathcal{B}}$ und für eine Zerlegung Z gilt $OD(Z) = \sum_{R_i \cap D \neq \emptyset} |R_i| = \lambda(\underbrace{\bigcup_{R_i \cap D \neq \emptyset} R_i}_{\supset D}) \geq \overline{\lambda}(D)$ und ebenso $UD(Z) \leq \overline{\lambda}(D)$ und daher $|D| = \inf OD(Z) = \sup UD(Z) = \overline{\lambda}(D)$.

3) Aus S. 4, d), sehen wir auch, dass für $A \in \mathcal{B}$ gilt $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U); A \subset U, U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}\}$ (denn $A_i = \prod_{l=1}^{n} [a_l, b_l) \in \mathcal{F} \Longrightarrow U_i = \prod_{l=1}^{n} (a_l - \delta_i, b_l) \supset A_i$ und $\lambda(U_i) \leq |A_i| + \varepsilon 2^{-i}$ für geeignetes $\delta_i > 0$). Daraus folgt auch (vgl. Übung 4)a))

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K);\ K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}$$

und man nennt Maße (auf Borel-σ-Algebren) mit diesen 2 Eigenschaften <u>regulär</u>.

4) $|D + x| = |D|$ und $\left|f(D)\right| = |\det f| \cdot |D|$ für D quadrierbar, $x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{R})$ (vgl. Analysis 3). Wegen S. 4, d), folgt daraus $\lambda(A + x) = \lambda(A),\ \lambda\big(f(A)\big) = |\det f| \lambda(A)$ für $A \in \mathcal{B}$ (und ebenso für $\overline{\lambda}, A \in \overline{\mathcal{B}}$). (Vgl. auch Satz 9, S. 30)

5) Wenn $B \subset [0,1]$ mit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{b + \mathbb{Q}; b \in B\}$ (als Faktorgruppe), so ist $\dot{\bigcup}_{q \in \mathbb{Q}} B + q = \mathbb{R}$. Wäre $B \in \overline{\mathcal{B}}$, so würde aus $[0,1] \subset \dot{\bigcup}_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} B + q \subset [-1, 2]$ folgen $1 \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \overline{\lambda}(B) \leq 3$ im Widerspruch zu $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \overline{\lambda}(B) = \begin{cases} 0 & : \ \overline{\lambda}(B) = 0 \\ \infty & : \ \overline{\lambda}(B) > 0 \end{cases}$. Also ist $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

[2] Für „$\Longleftarrow$“ nehme $B = \bigcap_k \bigcup R_i^k$, wobei $A \subset \bigcup R_i^k,\ \sum |R_i^k| < \frac{1}{k},\ R_i^k$ Int. $\Longrightarrow B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

§ 2 Integration

Im Folgenden sei (X, Σ, μ) ein Maßraum.

Def.:

1) Für $A \subset X$ heißt $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \begin{cases} 1 & : \ x \in A \\ 0 & : \ x \in X \setminus A \end{cases}$

   charakteristische Funktion von A. (Offenbar ist $\chi_A \in \mathcal{L}(X) \Longleftrightarrow A \in \Sigma$.)

2) $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ heißt Elementarfunktion $:\Longleftrightarrow$ (i) f messbar (ii) $f(X)$ ist eine endliche Menge, d.h. $f = \sum\limits_{\text{endlich}} \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \in \Sigma$, $\dot{\bigcup} A_i = X$, $\alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Es sei $\mathcal{E} := \{f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ Elementarfunktion}\} \subset \mathcal{L}(X)$

3) Für $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}$, α_i, A_i wie in 2), heißt

   $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) := \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+$

   Integral von f bzgl. μ (wobei $0 \cdot \infty := 0$, $c \cdot \infty = \infty$ für $c > 0$)

Lemma 5
$f, g \in \mathcal{E}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $A \in \Sigma \implies$
a) $\int \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$ b) $\int (f + \alpha g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \alpha \int g \, \mathrm{d}\mu$
c) $f \leq g$ (d.h. $\forall x \in X : f(x) \leq g(x)$) $\implies \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$

Beweis: leichte Übung.

Def.:

1) $\mathcal{L}_+(X) := \left\{ f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : \exists f_k \in \mathcal{E} \text{ mit } f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \text{ und } f = \sup\limits_k f_k (= \lim\limits_{k \to \infty} f_k) \right\}$

2) Für $f \in \mathcal{L}_+(X)$ und f_k wie in 1) heißt
   $\int f \, \mathrm{d}\mu := \sup\limits_k \int f_k \, \mathrm{d}\mu \ (= \lim\limits_{k \to \infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ Integral von f bzgl. μ.

Lemma 6

1) $\int f \, \mathrm{d}\mu$ ist wohldefiniert für $f \in \mathcal{L}_+(X)$.

2) b), c) in Lemma 5 gelten auch für $f, g \in \mathcal{L}_+(X)$.

Beweis: 1) a) Es seien $g, f_k \in \mathcal{E}$ mit $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ und $g \leq \sup\limits_k f_k$.

Wir wollen $\int g \,\mathrm{d}\mu \leq \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu$ zeigen. Sei $Q := \big\{x;\ g(x) > 0\big\}$. oEdA $g \not\equiv 0$.

<u>1. Fall</u> $\mu(Q) < \infty$. Sei $0 < \varepsilon < \min\limits_{x\in Q} g(x)$ und

$A_k := \big\{x \in Q; f_k(x) \geq g(x) - \varepsilon\big\} \in \Sigma$ (s. Lemma 2)

$\Longrightarrow A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = Q \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int f_k \,\mathrm{d}\mu \ &\geq \int \chi_{A_k} \cdot f_k \,\mathrm{d}\mu \geq \int \overbrace{\chi_{A_k}(x)\big(g(x) - \varepsilon\big)}^{\in\mathcal{E}} \,\mathrm{d}\mu(x) = \\
&\overset{\text{L. 5}}{=} \int \chi_{A_k} \cdot g \,\mathrm{d}\mu - \varepsilon\mu(A_k) \\
&= \underbrace{\sum_{\text{endl.}} \alpha_i \mu\Big(A_k \cap \big\{x;\ g(x) = \alpha_i\big\}\Big) - \varepsilon\mu(A_k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{k\to\infty} \\
&\overset{\text{L. 3}}{=} \sum \alpha_i \mu\Big(\big\{x;\ g(x) = \alpha_i\big\}\Big) - \varepsilon\mu(Q) \\
&= \int g \,\mathrm{d}\mu - \varepsilon\mu(Q) \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu \geq \int g \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

<u>2. Fall</u> $\mu(Q) = \infty$. Sei $\varepsilon := \min\limits_{x\in Q} g(x) > 0$,

$A_k := \big\{x \in Q;\ f_k(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\big\} \Longrightarrow \int f_k \,\mathrm{d}\mu \geq \int \chi_{A_k} \cdot f_k \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{\varepsilon}{2}\,\mu(A_k) \xrightarrow{\text{L. 3}} \frac{\varepsilon}{2}\mu(Q) = \infty$

$\Longrightarrow \int g \,\mathrm{d}\mu = \infty \leq \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu = \infty.$

b) $f_1 \leq f_2 \leq \cdots,\ \tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2 \leq \cdots,\ f = \sup\limits_k f_k = \sup\limits_k \tilde{f}_k$

$\Longrightarrow \forall i : \tilde{f}_i \leq \sup\limits_k f_k \overset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \int \tilde{f}_i \,\mathrm{d}\mu \leq \sup\limits_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu$

$\Longrightarrow \sup\limits_i \int \tilde{f}_i \,\mathrm{d}\mu \leq \sup\limits_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \sup\limits_i \int \tilde{f}_i \,\mathrm{d}\mu = \sup\limits_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu$

2) folgt aus Lemma 5. □

Bsp.: $X = [0,1]$ mit $\mu = \lambda\big|_X$, $f(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in X \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \ x \in X \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$\Longrightarrow f \in \mathcal{E} \subset \mathcal{L}_+(X)$ und $\int f \,\mathrm{d}\mu = 1 \cdot \underbrace{\lambda(X \setminus \mathbb{Q})}_{1} + 0 \cdot \underbrace{\lambda(X \cap \mathbb{Q})}_{0} = 1.$

Beachte, dass f <u>nicht</u> Riemann-integrierbar ist.

Satz 2 („von der monotonen Konvergenz“, B. Levi)

$f_i \in \mathcal{L}_+(X),\ f_1 \le f_2 \le \cdots \implies f := \sup\limits_k f_k\ (= \lim\limits_{k\to\infty} f_k) \in \mathcal{L}_+(X)$ und

$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sup\limits_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu\ \left(= \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu\right) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$

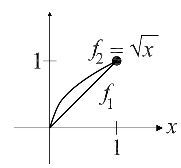
Beweis: a) Sei $f_i = \sup\limits_k f_i^k$ mit $f_i^k \in \mathcal{E},\ f_i^1 \le f_i^2 \le \cdots \implies g_k := \sup\{f_i^j;\, i,j \le k\} \in \mathcal{E}$ und $g_1 \le g_2 \le \cdots,\ g_k \le \sup\{f_1, \cdots, f_k\} = f_k \implies \sup\limits_k g_k \le f;$

andererseits $\forall i : \sup\limits_k g_k \ge \sup\limits_k f_i^k = f_i \implies \sup\limits_k g_k = f \implies f \in \mathcal{L}_+(X)$

b) $\int f \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{def.}}{=} \sup\limits_k \int \underbrace{g_k}_{\le f_k} \mathrm{d}\mu \le \sup\limits_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu$ und andererseits

$\forall k :\ f \ge f_k \implies \int f \,\mathrm{d}\mu \ge \sup\limits_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu$ $\square$

Bsp.: $X = [0,1]$ mit $\overline{\lambda}\big|_X,\ f_k(x) = \sqrt[k]{x}$



$\implies \lim\limits_{k\to\infty} f_k = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & 0 < x \le 1 \\ 0 & : & x = 0 \end{array} \right\} \implies f$ ist unstetig

$\implies f_k$ konvergiert nicht gleichmäßig und der Konvergenzsatz aus Analysis 1 (Walter I, 9.14) ist nicht anwendbar. Aber nach Levi ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k \,\mathrm{d}\overline{\lambda} = \int\limits_X \underbrace{f}_{\in\mathcal{E}} \mathrm{d}\overline{\lambda} = 1.$

Probe: Wir sehen in Seite 12, dass für Riemann-integrierbare Funktionen die $\int$-werte übereinstimmen $\implies$

$$\int\limits_X f_k \,\mathrm{d}\overline{\lambda} = \int\limits_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^{1/k}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1+1/k}}{1+\frac{1}{k}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}} \to 1\ \checkmark$$

Lemma 7

$\mathcal{L}_+(X) = \{f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar}\}.$

Beweis: „$\subset$“ nach Lemma 2, 4).

„$\supset$“ Sei $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar, $n \in \mathbb{N}$ fest, $m := n \cdot 2^n$.

$A_i := \big\{x \in X; i2^{-n} \le f(x) < (i+1)2^{-n}\big\},\ i = 0, \cdots, m-1,$

$A_m := \big\{x \in X; f(x) \ge n\big\} \implies X = \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{m}} A_i,$

$f_n := \sum\limits_{i=0}^{m} i2^{-n}\chi_{A_i} \in \mathcal{E}$ und $f_1 \le f_2 \le \cdots$ und $f = \sup\limits_n f_n \implies f \in \mathcal{L}_+(X)$ $\square$

Satz 3 („Lemma von Fatou“)

$$f_k \in \mathcal{L}_+(X) \implies \int \liminf_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Beweis: $g_k := \inf\limits_{m\ge k} f_m \implies f := \liminf\limits_{k\to\infty} f_k = \sup\limits_k g_k : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar
$\underset{\text{L. 7}}{\implies} g_k, f \in \mathcal{L}_+(X);\ g_1 \le g_2 \le \cdots$
$\underset{\text{Satz 2}}{\implies} \int f\,\mathrm{d}\mu = \sup\limits_k \int g_k\,\mathrm{d}\mu \le \sup\limits_k \inf\limits_{m\ge k} \int f_m\,\mathrm{d}\mu \qquad$ (da $g_k \le f_m$ für $m \ge k$)
$= \liminf\limits_{k\to\infty} \int f_k\,\mathrm{d}\mu$ $\square$

Bsp.: $X = [0,1]$ mit $\mu = \overline{\lambda}\big|_X$, $f_k \in \mathcal{E} \subset \mathcal{L}_+$ sei gegeben durch

$$f_k := \begin{cases} \chi_{[0,\frac{1}{2})} & : \ k = 1,3,5,\cdots \\ \chi_{[\frac{1}{2},1]} & : \ k = 2,4,6,\cdots \end{cases} \implies \int \overbrace{\liminf_{k\to\infty} f_k}^{=0} \,\mathrm{d}\mu = 0 < \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\int f_k\,\mathrm{d}\mu}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Def.:

1) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>integrierbar</u> $:\Longleftrightarrow f$ messbar und $\|f\|_1 := \int_X \underbrace{|f|}_{\in\mathcal{L}_+(X)} \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

   $\mathcal{L}^1(X) := \mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(X,\Sigma,\mu) := \{f \text{ integrierbar}\}$.

2) Für $f \in \mathcal{L}^1$ sei $f_+ := \sup\{f,0\}$, $f_- := \inf\{f,0\}$ und $\int_X f\,\mathrm{d}\mu := \int f_+\,\mathrm{d}\mu - \int(-f_-)\,\mathrm{d}\mu$. (Das ist wohldefiniert, da $\pm f_\pm \in \mathcal{L}_+(X)$ (Lemma 7) und $\infty > \int |f|\,\mathrm{d}\mu = \int f_+\,\mathrm{d}\mu + \int(-f_-)\,\mathrm{d}\mu$. (Lemma 6, 2).)

Lemma 8

a) $\mathcal{L}^1$ ist ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$) und $\|\cdot\|$ erfüllt die Δ-Ungleichung;

b) $\int : \mathcal{L}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist linear;

c) $f,g \in \mathcal{L}^1$ mit $f \le g \implies \int f\,\mathrm{d}\mu \le \int g\,\mathrm{d}\mu$; speziell ist immer $\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f|\,\mathrm{d}\mu$;

d) $\forall f \in \mathcal{L}^1 \cup \mathcal{L}_+ : \int |f|\,\mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow \mu\Big(\big\{x; f(x) \ne 0\big\}\Big) = 0$.

Beweis: a) $f \in \mathcal{L}^1 \implies cf \in \mathcal{L}^1$ ist klar für $c \in \mathbb{R}$; $f,g \in \mathcal{L}^1 \overset{\text{Lemma 2}}{\implies} f+g$ ist messbar;
$\|f+g\|_1 = \int |f+g|\,\mathrm{d}\mu \le \int\big(|f|+|g|\big)\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Lemma 6}}{=} \|f\|_1 + \|g\|_1 < \infty \implies f+g \in \mathcal{L}^1$.
b) $\int cf\,\mathrm{d}\mu = c\int f\,\mathrm{d}\mu$, $c \in \mathbb{R}$, ist klar;

$$f,g \in \mathcal{L}^1 \implies f+g = \overbrace{(f_+ + g_+)}^{\ge 0} + \overbrace{(f_- + g_-)}^{\le 0} = (f+g)_+ + (f+g)_-$$

(Vorsicht: Im Allgemeinen ist $f_+ + g_+ \neq (f+g)_+,\ f_- + g_- \neq (f+g)_-$)

$\Longrightarrow\ f_+ + g_+ - (f+g)_- = (f+g)_+ - (f_- + g_-) \in \mathcal{L}_+(X)$

$\underset{\text{L. 6 b)}}{\Longrightarrow} \int \underbrace{(f_+ + g_+)}_{\in\mathcal{L}_+} \mathrm{d}\mu + \int \underbrace{-(f+g)_-}_{\in\mathcal{L}_+} \mathrm{d}\mu \overset{\circledast}{=} \int \underbrace{(f+g)_+}_{\in\mathcal{L}_+} \mathrm{d}\mu + \int \underbrace{-(f_- + g_-)}_{\in\mathcal{L}_+} \mathrm{d}\mu$

$\Longrightarrow\ \int (f+g)\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{def.}}{=} \int (f+g)_+\,\mathrm{d}\mu - \int \big(-(f+g)_-\big)\,\mathrm{d}\mu$

$\overset{\circledast}{=} \int (f_+ + g_+)\,\mathrm{d}\mu - \int (\underbrace{-f_-}_{\in\mathcal{L}_+}\ \underbrace{-g_-}_{\in\mathcal{L}_+(X)})\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$

c) $f \leq g \implies g - f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}_+ \implies \int g\,\mathrm{d}\mu - \int f\,\mathrm{d}\mu \geq 0$

d) $A_k := \Big\{x \in X;\ \big|f(x)\big| \geq \frac{1}{k}\Big\} \implies A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\ A := \bigcup_k A_k = \big\{x \in X;\ f(x) \neq 0\big\}$.
Daher gilt

$$0 = \mu(A) \underset{\text{L. 3}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \Longleftrightarrow \forall k : \mu(A_k) = 0$$

Beweis von d) im Lemma 8:

„$\implies$“ $\int |f|\,\mathrm{d}\mu = 0,\ |f| \geq \frac{1}{k}\,\chi_{A_k} \implies \forall k : 0 = \int \frac{1}{k}\,\chi_{A_k}\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{k}\,\mu(A_k) \implies$
$\forall k : \mu(A_k) = 0 \implies \mu(A) = 0$

„$\Longleftarrow$“ $\mu(A) = 0,\ |f| \leq \infty \cdot \chi_A \implies \int |f|\,\mathrm{d}\mu \leq \int \underbrace{\infty \cdot \chi_A}_{\in\mathcal{E}} \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(A) =$

$\infty \cdot 0 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{S. 8, Def. 3)}}}{=} 0$ □

Bemerkung Für $X = \mathbb{R}^n,\ \mu = \overline{\lambda}$ und f (absolut) Riemann-integrierbar gilt, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int f\,\mathrm{d}\overline{\lambda} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis davon Wegen Satz 2 genügt es (vgl. Analysis 3, Seite 24, 25) $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar zu betrachten. Nach Addition einer Konstanten ist oEdA $f \geq 0$. Für eine Zerlegung Z ist

$$\underbrace{\sum_i \underline{f}_i \chi_{R_i}}_{=:g_Z \in \mathcal{E}} \leq f \leq \underbrace{\sum_i \overline{f}_i \chi_{R_i}}_{:=h_Z \in \mathcal{E}}$$

(wobei nun $R_i \in \mathcal{F}$ und $\overline{f}_i = \sup\big\{f(x); x \in \overline{R_i}\big\},\ \underline{f}_i = \inf\big\{f(x); x \in \overline{R_i}\big\}$ wie in Analysis 3)

Für kleiner werdende Zerlegungen Z_k mit
$OD(Z_k),\ UD(Z_k) \longrightarrow \int_D f(x)\,\mathrm{d}x$ ist dann $g := \sup_k g_{Z_k} \in \mathcal{L}_+(X)$,

$h := \inf_k h_{Z_k} \in \mathcal{L}_+(X)$ und $g_{Z_k}^{\in\mathcal{E}} \le f \le h_{Z_k}^{\in\mathcal{E}} \implies g \le f \le h$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}\lambda \overset{\text{def.}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int g_{Z_k}\,\mathrm{d}\lambda}_{UD(Z_k)} = \int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \underbrace{OD(Z_k)}_{\int h_{Z_k}\,\mathrm{d}\lambda} \overset{\circledast}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h\,\mathrm{d}\lambda \qquad (\circledast : \text{Def. bzgl. } h_{Z_1} - h_{Z_k})$$

$\implies$ (Lemma 8, d) $\implies \lambda\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^n;\ h(x) \ne g(x)\big\}\Big) = 0$

$\implies \overline{\lambda}\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \ne g(x)\big\}\Big) = 0 \implies f$ messbar bzgl. $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$

$\implies f \in \mathcal{L}_+$ und $\underset{\text{(Lebesgueint.)}}{\int f\,\mathrm{d}\overline{\lambda}} = \int g\,\mathrm{d}\overline{\lambda} = \underset{\text{(Riemannint.)}}{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ $\square$

Bezeichnung Für $\int_Y f\,\mathrm{d}\overline{\lambda},\ Y \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)},\ f \in \mathcal{L}^1(Y)$ oder $f \in \mathcal{L}_+(Y)$, schreibt man auch oft $\int_Y f(x)\,\mathrm{d}x$.

Def.:

1) $f, g \in \mathcal{L}(X)$ heißen <u>gleich fast überall</u> $:\Longleftrightarrow f = g$ f.ü.
$\Longleftrightarrow \mu\Big(\big\{x \in X;\ f(x) \ne g(x)\big\}\Big) = 0$. (Das ist offenbar eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{L}(X)$; Vorsicht: Für die Äquivalenzklasse $[f]$ schreibt man meistens wieder f.)

2) $L^1(X) := \big\{[f];\ f \in \mathcal{L}^1(X)\big\} \overset{\text{L. 8, d)}}{=} \mathcal{L}^1(X)\Big/\overbrace{\big\{h \in \mathcal{L}^1;\ \|h\|_1 = 0\big\}}^{\text{Unter-VR von } \mathcal{L}}$

Bemerkungen 1) Mit $\big\|[f]\big\|_1 := \|f\|_1$ wird $L^1(X)$ ein normierter Raum, der nach Satz 5, Seite 16, sogar ein Banachraum ist. Weiters ist $\int :\ L^1(X) \longrightarrow \mathbb{R} : [f] \longmapsto \int_X f\,\mathrm{d}\mu$ wohldefiniert, linear und stetig.
2) Wenn $X = \mathbb{R}^n,\ \mu = \overline{\lambda},\ f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ mit $f = g$ f.ü. $h := f - g \implies$
$A := h^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \ne g(x)\big\}$ ist offen und eine Nullmenge $\implies A = \emptyset$, d.h. in einer Äquivalenzklasse gibt es höchstens <u>eine</u> stetige Funktion.

Satz 4 („von der majorisierten Konvergenz“, Lebesgue)
Es seien (i) $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar, $k \in \mathbb{N}$;
(ii) $g \in \mathcal{L}_+(X)$ mit $\int g\,\mathrm{d}\mu < \infty$ und $\forall k \in \mathbb{N} : |f_k| \le g$ (man sagt „g ist eine integrierbare Majorante“)
(iii) f_k konvergiert f.ü., d.h. $\mu\Big(\big\{x;\ f_k(x) \text{ divergiert}\big\}\Big) = 0$.
Sei dann $f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) & : \ f_k(x) \text{ konvergiert;} \\ 0 & : \ \text{sonst.} \end{cases}$
Dann gilt: $f_k, f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu$.

Beweis: a) $B := \big\{x \in X;\ f_k(x) \text{ konvergiert}\big\} =$
$\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{j,k\ge N} \big\{x \in X;\ \big|f_j(x) - f_k(x)\big| \le \frac{1}{m}\big\} \in \Sigma$

$\Longrightarrow \; \tilde{f}_k := f_k \cdot \chi_B \in \mathcal{L}(X) \; \Longrightarrow \; f = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{f}_k \in \mathcal{L}(X)$.

b) $\int |f_k| \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu < \infty \; \Longrightarrow \; f_k \in \mathcal{L}^1(X)$;
$|f| \leq \sup\limits_k |f_k| \leq g \; \Longrightarrow \; f \in \mathcal{L}^1(X)$; nach (iii) und Lemma 8 d) ist $\int f_k \,\mathrm{d}\mu = \int \tilde{f}_k \,\mathrm{d}\mu$ und es genügt daher, noch $\lim\limits_{k\to\infty} \int \tilde{f}_k \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$ zu zeigen.

c) $g_k := |f - \tilde{f}_k| \; \Longrightarrow \; 0 \leq g_k \leq 2g$ und
$\forall x \in X : \lim\limits_{k\to\infty} (2g - g_k)(x) = 2g(x) \; \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
2\int g \,\mathrm{d}\mu &= \int \liminf_{k\to\infty} (2g - g_k) \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int (2g - g_k) \,\mathrm{d}\mu \\
&= 2\int g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \; \limsup_{k\to\infty} \underbrace{\int g_k \,\mathrm{d}\mu}_{\geq 0} \leq 0 \; \Longrightarrow \; \lim_{k\to\infty} \int g_k \,\mathrm{d}\mu = 0
$$

$$
\Longrightarrow \; \left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int \tilde{f}_k \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int \underbrace{|f - \tilde{f}_k|}_{=g_k} \,\mathrm{d}\mu \to 0
$$

$$
\Longrightarrow \; \lim_{k\to\infty} \int \tilde{f}_k \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu. \qquad \square
$$

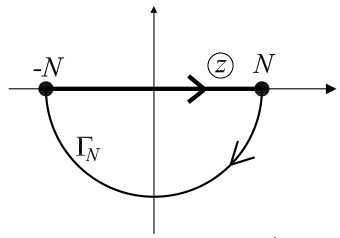
Beispiele 1) a) Für $y \in \mathbb{R}$ sei $h(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \; \Longrightarrow \; h$ ist stetig, denn $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \underset{\text{Lebesgue}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(xy_0)}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = h(y_0)$, wobei hier in der Notation von Satz 4 $f_k(x) := \dfrac{\cos(xy_k)}{1+x^2}$, $y_k \to y_0$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_+(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x) \,\mathrm{d}x = \pi < \infty$, $\forall k : |f_k| \leq g$ und $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \dfrac{\cos(xy_0)}{1+x^2} = f(x)$.

b) Wenn wir ebenso untersuchen wollen, ob h auch differenzierbar ist, so müssen wir

$$
\lim_{k\to\infty} \frac{h(y_k) - h(y_0)}{y_k - y_0} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\cos(xy_k) - \cos(xy_0)}{y_k - y_0}}_{\text{MWS: } -\sin(x\vartheta_{k,x})\cdot x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}
$$

betrachten. Nun wäre die Majorante $g(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2} \in \mathcal{L}_+(\mathbb{R})$ zu nehmen, aber $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \ln(1+x^2)\Big|_0^\infty$. D.h. der Satz von Lebesgue ist nicht anwendbar und wir können so nicht entscheiden, ob h differenzierbar ist.

c) Wegen $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\sin(xy_0)}{1+x^2}}_{\text{ungerade}} \mathrm{d}x = 0$, ist $h(y_0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy_0}}{1+x^2} \mathrm{d}x$ und wenn $y_0 \geq 0$, so ist $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy_0}$ beschränkt in der unteren Halbebene $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z \leq 0\}$ (weil $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)y_0}| = \mathrm{e}^{yy_0} \leq 1$ für $y \leq 0,\ y_0 \geq 0$); wenn wir den Residuensatz auf



anwenden mit $N \to \infty$, erhalten wir daher

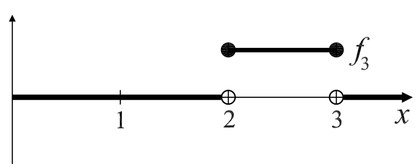
$$h(y_0) = \lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy_0}}{1+z^2} \mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy_0}}{1+z^2}\right) =$$

$$-2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zy_0}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = -2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-y_0}}{-2\mathrm{i}} = \pi\mathrm{e}^{-y_0},$$

und, weil h gerade ist, folgt $h(y) = \pi\mathrm{e}^{-|y|}$. Tatsächlich ist also h stetig, aber in 0 nicht differenzierbar.

2) Allgemeiner sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (d.h. eigentlich ist $g = [\tilde{g}],\ \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$).
Dann heißt $\mathcal{F}g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : y \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\,\mathrm{d}x$ <u>Fouriertransformierte</u> von g. (Für komplexwertige Funktionen $f = f_1 + \mathrm{i}f_2,\ f_j \in \mathcal{L}^1(X)$, setzt man wieder $\int f\,\mathrm{d}\mu := \int f_1\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int f_2\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$.) Satz 4 gilt ebenso für komplexwertige Funktionen f_k (durch Rückführung auf $\operatorname{Re} f_k,\ \operatorname{Im} f_k$) und wir erhalten wie in 1) a), dass $\mathcal{F}g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ bzw. noch allgemeiner $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

3) Wenn $f_k = \chi_{[k-1,k]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$



so ist $\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, aber $\lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{\int f_k(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} = 1 \neq \int \underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)}_{=0}\,\mathrm{d}x = 0.$

Hier ist auch ein Fall, wo es keine integrierbare Majorante g gibt, denn $g \in \mathcal{L}_+(\mathbb{R})$ und $\forall k : |f_k| \leq g \implies \forall x \geq 0 : g(x) \geq 1 \implies \int g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$

Satz 5 $L^1(X)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Es ist nur mehr die Vollständigkeit von $L^1(X)$ zu zeigen, d.h. dass jede C-Folge in $L^1(X)$ konvergiert. $f_n = [\tilde{f}_n] \in L^1(X)$ sei eine C-Folge $\implies$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon \quad \circledast$$

$\implies \exists$ Teilfolge n_j mit $\| \underbrace{f_{n_{j+1}} - f_{n_j}}_{=:g_j} \|_1 \leq 2^{-j}$.

$$\begin{aligned}
\text{Es sei } g &:= |\tilde{f}_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{f}_{n_{j+1}} - \tilde{f}_{n_j}| = \\
&= |\tilde{f}_{n_1}| + \sup_k \sum_{j=1}^{k} |\tilde{f}_{n_{j+1}} - \tilde{f}_{n_j}| \in \mathcal{L}_+(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \int g\,\mathrm{d}\mu &\underset{\text{Levi}}{=} \int |\tilde{f}_{n_1}|\,\mathrm{d}\mu + \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int |\tilde{f}_{n_{j+1}} - \tilde{f}_{n_j}|\,\mathrm{d}\mu \\
&= \|f_{n_1}\|_1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_1}_{\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1} < \infty.
\end{aligned}$$

Wenn $A := \{x; g(x) = \infty\}$, so ist $g \geq \infty \cdot \chi_A \in \mathcal{E} \implies \mu(A) = 0$, da sonst $\int g\,\mathrm{d}\mu = \infty$ wäre.
Für $x \in X \setminus A$ gilt $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|\tilde{f}_{n_{j+1}}(x) - \tilde{f}_{n_j}(x)\right| < \infty \implies \tilde{f}_{n_j}(x)$ konvergiert.

Sei $\tilde{f}(x) := \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \tilde{f}_{n_j}(x) & : \ x \in X \setminus A \\ 0 & : \ x \in A. \end{cases}$

Weiters ist

$$\begin{aligned}
\forall x \in X : \left|\tilde{f}_{n_j}(x)\right| &\leq \left|\tilde{f}_{n_1}(x)\right| + \left|\tilde{f}_{n_2}(x) - \tilde{f}_{n_1}(x)\right| + \cdots + \left|\tilde{f}_{n_j}(x) - \tilde{f}_{n_{j-1}}(x)\right| \\
&\leq g(x) \text{ und daher auch } \left|\tilde{f}(x)\right| \leq g(x)
\end{aligned}$$

$\implies \tilde{f} \in \mathcal{L}^1 \implies \tilde{f}_{n_j} - \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$; wegen $2g \geq |\tilde{f}_{n_j} - \tilde{f}|$ ergibt der Satz von Lebesgue $\lim\limits_{j\to\infty} \int |\tilde{f}_{n_j} - \tilde{f}|\,\mathrm{d}\mu = 0$ d.h. $\|f_{n_j} - f\|_1 \to 0$, wenn $f = [\tilde{f}]$.

Dann folgt $\forall m \geq N$ wie in $\circledast$ $\|f_m - f\|_1 \leq \|f_m - f_{n_j}\|_1 + \|f_{n_j} - f\|_1 \leq 2\varepsilon$ wenn $n_j \geq N$ und so, dass $\|f_{n_j} - f\|_1 < \varepsilon$ und daher $f_m \to f$ in $L^1(X)$. $\square$

Bemerkungen 1) Der Beweis zeigt insbesondere, dass eine bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergente Folge $f_n = [\tilde{f}_n] \in L^1(X)$ eine f.ü. konvergente Teilfolge $\tilde{f}_{n_j}$ hat mit $\lim\limits_{j\to\infty} \tilde{f}_{n_j} = \tilde{f}$ f.ü. und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = [\tilde{f}]$ in $L^1(X)$.

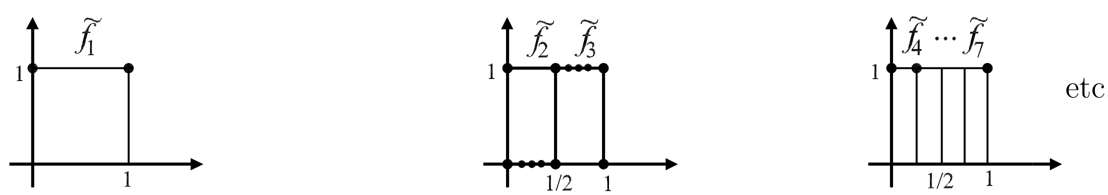
2) Ebenso zeigt man, dass auch

$$L^p(X) := \left\{[\tilde{f}];\ \tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ messbar}, \|f\|_p^p := \int_X \left|\tilde{f}(x)\right|^p \mathrm{d}\mu < \infty\right\}$$

vollständig ist für $1 < p < \infty$.
Auch $L^\infty(X) := \left\{[\tilde{f}];\ \tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ messbar}, \exists M > 0 : \forall x \in X : \left|\tilde{f}(x)\right| \leq M\right\}$ ist vollständig (was ganz leicht zu zeigen ist).

Falls $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $X = \overline{\mathring{X}}$, $\mu = \overline{\lambda}\big|_X$, so ist $\mathcal{C}(X) \hookrightarrow L^P(X) : f \longmapsto [f]$, aber $\mathcal{C}(X)$ ist nur in $L^\infty(X)$ abgeschlossen und daher bzgl. $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$, nicht vollständig, vgl. Analysis 2. ($L^p(X)$ ist gerade die Vervollständigung von $\mathcal{C}(X)$ für $1 \leq p < \infty$ (o.B.))

Bsp.: Für $X = [0,1]$ mit $\mu = \overline{\lambda}\big|_X$ und $k = 2^n + m,\ 0 \leq m < 2^n$ sei
$\tilde{f}_k := \chi_{[m2^{-n},(m+1)2^{-n}]}$, d.h.



Z.B. $k = 1 = 2^0 + 0$ $k = 3 = 2^1 + 1$ $k = 6 = 2^2 + 2$
$\tilde{f}_1 = \chi_{[0,1]}$ $\tilde{f}_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$ $\tilde{f}_6 = \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}$

$\Longrightarrow$ $\|f_k\|_1 = \displaystyle\int |\tilde{f}_k|\,\mathrm{d}\mu = 2^{-n} \to 0$ für $k \to \infty$, d.h. $f_k \to 0$ in $L^1(X)$, aber $\tilde{f}_k(x)$ konvergiert für kein x. Die Teilfolge $\tilde{f}_{2^n}$ würde hier f.ü. gegen 0 konvergieren.

$$\begin{aligned}
\text{Somit: Normkonvergenz} &\quad\not\Longrightarrow\quad \text{Konvergenz f.ü.}\\
\text{Normkonvergenz} &\quad\Longrightarrow\quad \text{Konvergenz f.ü. einer Teilfolge}\\
\text{Konvergenz f.ü.} &\quad\underset{\text{vgl. Seite 15, 3)}}{\not\Longrightarrow}\quad \text{Normkonvergenz oder Konvergenz des } \int\\
\text{majorisierte Konvergenz f.ü.} &\quad\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow}\quad \text{Normkonvergenz und Konvergenz des } \int
\end{aligned}$$

§ 3 Produktmaße

Def.: (Vgl. Seite 1, Bsp. 2) (X_i,Σ_i) seien Messräume, $i=1,\cdots,n$,
$X:=\prod\limits_{i=1}^{n} X_i,\ \Sigma_1\times\cdots\times\Sigma_n := \{A_1\times\cdots\times A_n; A_l\in\Sigma_l\}$.
$\Sigma_1\otimes\cdots\otimes\Sigma_n := \Sigma_{\Sigma_1\times\cdots\times\Sigma_n}$ und $(X,\Sigma_1\otimes\cdots\otimes\Sigma_n)$ heißt Produkt der Messräume (X_i,Σ_i), $i=1,\cdots,n$.

Bemerkung $\Sigma_1\otimes\cdots\otimes\Sigma_n$ ist die kleinste σ-Algebra auf X, bzgl. der alle Projektionen $p_l : X=\prod\limits_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow X_l$ messbar sind (denn $A_1\times\cdots\times A_n = \bigcap\limits_{l=1}^{n} p_l^{-1}(A_l)$).
Daher gilt $(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\otimes\Sigma_3 = \Sigma_1\otimes\Sigma_2\otimes\Sigma_3$ etc.

Def.: (Vgl. auch Seite 6) Ein Maßraum (X,Σ,μ) heißt σ-endlich $:\iff \exists B_1,B_2,\cdots\in\Sigma$ mit $\forall N:\mu(B_N)<\infty$ und $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N = X$.

Satz 6 + Def.
$(X_l,\Sigma_l,\mu_l),\ l=1,\cdots,n$, seien σ-endliche Maßräume, $X:=\prod\limits_{l=1}^{n} X_l,\ \Sigma:=\bigotimes\limits_{l=1}^{n}\Sigma_l$.
Dann gibt es genau ein Maß $\mu:\Sigma\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ mit

$$\circledast\quad \forall A_l\in\Sigma_l : \mu\Big(\prod_{l=1}^{n} A_l\Big) = \prod_{l=1}^{n}\mu_l(A_l) \qquad (\text{ mit } 0\cdot\infty := 0 \text{ rechts})$$

μ heißt Produktmaß von $\mu_1,\cdots,\mu_n$ und wird mit $\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n$ bezeichnet. (X,Σ,μ) heißt Produkt der Maßräume (X_l,Σ_l,μ_l).

Beweis:
a) Es sei $\mathcal{F}:=\Sigma_1\times\cdots\times\Sigma_n$ und $\mathcal{G}:=\{\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i;\ A_1,\cdots,A_k\in\mathcal{F}\}$.

Dann gilt wieder (vgl. Seite 3) $\forall A\in\mathcal{G}:\exists A_i\in\mathcal{F}: A=\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{k}} A_i$ und $\mathcal{G}$ ist eine Algebra (d.h. ein Ring und $X\in\mathcal{G}$) bzw.
i) $\emptyset\in\mathcal{G}$
ii) $A\in\mathcal{G}\implies X\setminus A\in\mathcal{G}$
iii) $A_1,\cdots,A_k\in\mathcal{G}\implies \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i\in\mathcal{G}$.

b) Wie in Seite 3 ist μ auf $\mathcal{G}$ eindeutig festgelegt durch $\mu\Big(\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{k}} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{k}\mu(A_i)$ wenn $A_i\in\mathcal{F}$ paarweise disjunkt.

c) Wir beweisen zuerst die Eindeutigkeit von $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $\circledast$ im Fall, dass alle μ_l <u>endliche Maße</u> sind, d.h. $\mu_l(X_l) < \infty$.

Def.:
$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt <u>monotone Klasse</u> $:\iff \forall A_i \in \mathcal{M}$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ bzw. $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ gilt $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$ bzw. $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$.

Der Durchschnitt von monotonen Klassen ist wieder eine und daher ist für $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{M}_\mathcal{T} := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{M}\supset\mathcal{T} \\ \mathcal{M} \text{ mon. Kl.}}} \mathcal{M}$ die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{T}$ enthält.
Offenbar ist $\mathcal{M}_\mathcal{T} \subset \Sigma_\mathcal{T}$ (da σ-Algebren auch monotone Klassen sind).
Nun seien $\mu, \tilde{\mu}$ 2 Maße auf Σ mit $\circledast$. Wegen Lemma 3 und § 1, Übung 2 (beachte $\mu(X) = \tilde{\mu}(X) < \infty$), ist $\big\{A \in \Sigma;\ \mu(A) = \tilde{\mu}(A)\big\}$ eine monotone Klasse $\implies$ $\mu, \tilde{\mu}$ stimmen überein auf $\mathcal{M} := \mathcal{M}_\mathcal{G} \subset \Sigma$. Wenn wir noch zeigen, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist, folgt $\mathcal{M} = \Sigma$ und wir sind fertig.

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$ $\surd$

ii) $A \in \mathcal{M} \implies X \setminus A \in \mathcal{M}$, da $\{X \setminus A;\ A \in \mathcal{M}\}$ auch eine monotone Klasse ist, die $\mathcal{G}$ enthält.

iii) Um $A_i \in \mathcal{M} \implies \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$ zu zeigen, genügt es $A_1, A_2 \in \mathcal{M} \implies A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$ zu zeigen, da dann $\bigcup\limits_i A_i = \bigcup_k (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \in \mathcal{M}$.

Für $A \in \mathcal{M}$ sei $\mathcal{M}^A := \{B \in \mathcal{M};\ A \cup B \in \mathcal{M}\} \implies \mathcal{M}^A$ ist eine monotone Klasse.

$A \in \mathcal{G} \implies \mathcal{G} \subset \mathcal{M}^A \implies \mathcal{M} = \mathcal{M}^A \implies$ (wegen $B \in \mathcal{M}^A \iff A \in \mathcal{M}^B$) $\implies \forall B \in \mathcal{M} :$ $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}^B \implies \forall B \in \mathcal{M} : \mathcal{M} = \mathcal{M}^B \implies \forall A, B \in \mathcal{M} : A \cup B \in \mathcal{M}$.

d) Im allgemeinen Fall (dass μ_l σ-endliche Maße sind) seien $B_N^l \in \Sigma_l$ mit $B_1^l \subset B_2^l \subset \cdots$, $\bigcup\limits_N B_N^l = X_l$ und $\forall l, N : \mu_l(B_N^l) < \infty$ und $B_N := \prod\limits_{l=1}^n B_N^l$.
Dann erhalten wir für $A \in \Sigma : \mu(A) \overset{\text{Lemma 3}}{=} \lim\limits_{N\to\infty} \mu(A \cap B_N) = \tilde{\mu}(A)$, weil $\mu\big|_{\Sigma\cap\mathcal{P}(B_N)} = \tilde{\mu}\big|_{\Sigma\cap\mathcal{P}(B_N)}$ nach c). (Vgl. auch Seite 6).
[Beachte, dass $\Sigma \cap \mathcal{P}(B_N) = \bigotimes\limits_{l=1}^n \Sigma_l \cap \mathcal{P}(B_N^l)$, denn

$$\Sigma = \left\{ \dot{\bigcup_{\varepsilon\in\{0,1\}^n}} A_\varepsilon,\ A_\varepsilon \in \bigotimes_{l=1}^n \Sigma_l \cap \mathcal{P}\left(\left\{ \begin{array}{rcl} B_N^l : \varepsilon_l & = & 0 \\ X_l \setminus B_N^l : \varepsilon_l & = & 1 \end{array} \right\}\right) \right\}.]$$

e) Um μ zu konstruieren, genügt es (wegen $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \otimes \Sigma_3 = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3$) den Fall $n = 2$

zu betrachten. Für $x_1 \in X_1$ ist $X_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ messbar (nach Lemma 1) $\implies \forall A \in \Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 : A_{x_1} := \{x_2 \in X_2;\ (x_1, x_2) \in A\} \in \Sigma_2$.
Für $A \in \Sigma$ sei $\varphi_A : X_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : x_1 \longmapsto \mu_2(A_{x_1})$.

Wenn $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{G}$ mit $A_i = A_i^1 \times A_i^2 \in \mathcal{F}$, so ist $\varphi_A = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i^1} \cdot \mu_2(A_i^2) \in \mathcal{E}(X_1)$.
Für allgemeines $A \in \Sigma$ ist $\varphi_A \in \mathcal{L}_+(X_1)$, d.h. messbar, denn wenn $B_N \in \Sigma_2,\ B_1 \subset B_2 \subset \cdots, \bigcup_N B_N = X_2,\ \forall N : \mu_2(B_N) < \infty$, so ist $\varphi_A = \sup_N \varphi_{A \cap (X_1 \times B_N)}$ und für $B \in \Sigma_2$ fest mit $\mu_2(B) < \infty$ gilt, dass $\{A \in \Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2;\ \varphi_{A \cap (X_1 \times B)}$ messbar$\}$ eine monotone Klasse ist (Lemma 3), die $\mathcal{G}$ enthält, und daher nach c) gleich Σ ist.

f) Nun definieren wir
$$\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : A \longmapsto \int_{X_1} \varphi_A \,\mathrm{d}\mu_1;$$
offenbar ist $\mu(\emptyset) = 0$; wenn $A = \dot{\bigcup}_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit $A_i \in \Sigma$, so ist $\varphi_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) = \mu_2(\dot{\bigcup}_{i\in\mathbb{N}} A_{i,x_1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(A_{i,x_1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{A_i}(x_1) \implies \varphi_A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{A_i} = \sup_k \sum_{i=1}^{k} \varphi_{A_i} \underset{\text{Levi}}{\implies} \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \implies \mu$ ist ein Maß und erfüllt
$\mu(\underbrace{A_1}_{\in\Sigma_1} \times \underbrace{A_2}_{\in\Sigma_2}) = \int_{X_1} \varphi_{A_1 \times A_2} \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{X_1} \chi_{A_1} \cdot \mu_2(A_2) \,\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$. □

Bemerkung Die Formel $\mu(A) = \int_{X_1} \varphi_A \,\mathrm{d}\mu_1$, die zur Konstruktion von μ verwendet wurde, lässt sich auch als $\int_{X_1 \times X_2} \chi_A \,\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mathrm{d}\mu_2 = \int_{X_1} \Big(\underbrace{\int \chi_A(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2)}_{\varphi_A(x_1)} \Big) \mathrm{d}\mu_1(x_1)$ schreiben und wird in Satz 7 und 8 zum Satz von Fubini verallgemeinert.

Bsp.:
1) a) Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, denn z.B. für $n = 2$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \Sigma_{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})} \supset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ (denn $U \subset \mathbb{R}^2$ offen $\implies U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)) \implies \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \Sigma_{\mathcal{T}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) und umgekehrt gilt $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies A_1 \times A_2 = \mathrm{pr}_1^{-1}(A_1) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (da $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies$ messbar) und somit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \implies \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

[Allgemein sieht man ebenso, dass $\mathcal{B}(X_1 \times X_2) = \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$, wenn X_i topologische Räume sind, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.]

b) Wenn λ bzw. λ_1 das Lebesgue-Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}$ sind, so ist für $A = \prod_{l=1}^{n} [a_l, b_l) \subset \mathbb{R}^n$.

$\lambda(A) \underset{\text{Satz } 1}{=} \prod_{l=1}^{n}(a_l - b_l) \underset{\text{Satz } 6}{=} (\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1)(A)$ und daher gilt $\lambda = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1$.

2) Wenn wir $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} (0,\infty) \times \mathbb{S}^n : x \longmapsto \left(|x|, \dfrac{x}{|x|}\right)$ identifizieren, so gilt wie in 1)a), dass $\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big) = \mathcal{B}\big((0,\infty)\big) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{S}^n)$.

Allgemein, wenn (X, Σ, μ) ein Maßraum ist und $f \in \mathcal{L}_+(X)$, so ist
$f \cdot \mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : A \longmapsto \int \chi_A \cdot f \,\mathrm{d}\mu$ auch ein Maß.
$f \cdot \mu$ heißt <u>Maß mit der Dichte</u> f bzgl. μ.

Speziell ist $r^n \cdot \lambda_1$ ein Maß auf $\mathcal{B}\big((0,\infty)\big)$ und dann gilt $r^n \cdot \lambda_1 \otimes \sigma = \lambda\big|_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$, wobei σ das Oberflächenmaß auf $\mathbb{S}^{n-1}$ bezeichnet (s. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, S. 62 und S. 92, vgl. auch Analysis 3, 86).

Satz 7 (von Fubini-Tonelli)
$(X_l, \Sigma_l, \mu_l),\ l = 1, \cdots, n$, seien σ-endliche Maßräume,
$X := \prod_{l=1}^{n} X_l,\ \Sigma := \bigotimes_{l=1}^{n} \Sigma_l,\ \mu := \bigotimes_{l=1}^{n} \mu_l,\ f \in \mathcal{L}_+(X)$.
Dann gilt für jede Permutation $\{i_1, \cdots, i_n\} = \{1, \cdots, n\}$

$$\circledast \qquad \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{X_{i_1}} \left(\int_{X_{i_2}} \cdots \left(\int_{X_{i_n}} f(x_1, \cdots, x_n) \,\mathrm{d}\mu_{i_n}(x_{i_n}) \right) \cdots \right) \mathrm{d}\mu_{i_1}(x_{i_1}) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

und die rechte Seite ist wohldefiniert, d.h. die Integranden sind jeweils in $\mathcal{L}_+(X_j)$.

Beweis: a) Es genügt (mit Induktion) den Fall $n = 2$ zu betrachten und oEdA
$i_1 = 1,\ i_2 = 2$. Wenn $f \in \mathcal{E}(X),\ f = \sum_{\text{endlich}} \alpha_i \chi_{A_i},\ A_i \in \Sigma,\ \alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}_+ \implies$
$f(x_1, -) = \sum \alpha_i \chi_{A_{i,x_1}} \in \mathcal{E}(X_2)$ (wobei $A_{i,x_1} = \big\{x_2 \in X_2; (x_1, x_2) \in A_i\big\}$,
vgl. Satz 6, Beweis e)) $\implies$
$\implies \varphi_f(x_1) := \int_{X_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \sum_i \alpha_i \int_{X_2} \chi_{A_{i,x_1}} \,\mathrm{d}\mu_2 = \sum_i \alpha_i \varphi_{A_i}(x_1) \in \mathcal{L}_+(X_1)$
(Satz 6, Beweis e)) und

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \varphi_f \,\mathrm{d}\mu_1 = \sum_i \alpha_i \int_{X_1} \varphi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu_1 \overset{\substack{\text{Satz 6, Beweis f)} \\ \downarrow}}{=}$$
$$\sum_i \alpha_i \mu(A_i) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

b) Für $f \in \mathcal{L}_+(X)$ seien $f_k \in \mathcal{E}(X)$ mit $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ und $f = \sup_k f_k \implies$

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{def.}}{=} \sup_k \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu \underset{\text{a)}}{=} \sup_k \int_{X_1} \underbrace{\left(\int_{X_2} f_k(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)}_{\varphi_{f_k}} \mathrm{d}\mu_1(x_1);$$

$f_k(x_1,-) \in \mathcal{E}(X_2)$, $f_1(x_1,-) \le f_2(x_1,-) \le \cdots$, $\sup\limits_k f_k(x_1,-) = f(x_1,-) \underset{\text{Seite 8, Def.}}{\Longrightarrow}$
$f(x_1,-) \in \mathcal{L}_+(X_2)$ und $\varphi_f(x_1) := \int_{X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \sup\limits_k \varphi_{f_k}(x_1)$; $\varphi_{f_k} \in \mathcal{L}_+(X_1)$ nach a)
$\underset{\text{Levi}}{\Longrightarrow}$ $\varphi_f \in \mathcal{L}_+(X_1)$ und $\int_{X_1} \varphi_f\,\mathrm{d}\mu_1 = \sup\limits_k \int_{X_1} \varphi_{f_k}\,\mathrm{d}\mu_1 \Longrightarrow \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_{X_1} \varphi_f\,\mathrm{d}\mu_1 =$
$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1)$ □

Satz 8 (von Fubini)
$X_l, \Sigma_l, \mu_l, X, \Sigma, \mu$ seien wie in Satz 7, oEdA $n = 2$, und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt:

1) $f \in \mathcal{L}^1(X) \Longleftrightarrow \int_{X_1}\left(\int_{X_2} \big|f(x_1,x_2)\big|\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1) < \infty.$

2) Falls $f \in \mathcal{L}^1(X)$, so ist

$$N := \big\{x_1 \in X_1;\ f(x_1,-) \notin \mathcal{L}^1(X_2)\big\} \in \Sigma_1,\ \mu_1(N) = 0,$$

$$\varphi_f(x_1) := \left\{\begin{array}{ccc} 0 & : & x_1 \in N \\ \int\limits_{X_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) & : & x_1 \in X_1 \setminus N \end{array}\right\} \in \mathcal{L}^1(X_1)$$

und $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_{X_1} \varphi_f\,\mathrm{d}\mu_1.$

3) Wenn $f \in \mathcal{L}^1(X)$, $F := [f] \in L^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^1(X)$ mit $[f] = [g]$ (d.h. $f = g$ f.ü.), so ist $[\varphi_f] = [\varphi_g] \in L^1(X_1)$ und daher gilt

$$\int_X F\,\mathrm{d}\mu = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} F(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1),$$

wenn $\int_{X_2} F(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) := [\varphi_f]$.

Beweis:
1) $f \in \mathcal{L}^1(X) \Longleftrightarrow \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty \underset{\text{Satz 7}}{\Longleftrightarrow} \int_{X_1}\left(\int_{X_2} \big|f(x_1,x_2)\big|\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1) < \infty.$

2) a) $N = \big\{x_1 \in X_1;\ \int_{X_2} \big|f(x_1,x_2)\big|\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \infty\big\} = \varphi_{|f|}^{-1}(\infty)$ ist messbar nach Satz 7 und

wegen $\varphi_{|f|} \geq \infty \cdot \chi_N$ gilt $f \in \mathcal{L}^1 \implies \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Satz 7}}{=} \int_{X_1} \varphi_{|f|} \,\mathrm{d}\mu_1 < \infty \implies \mu_1(N) = 0$.

b) φ_f ist messbar, da $\varphi_f(x_1) = \begin{cases} 0 & : \ x_1 \in N \\ \int\limits_{X_2} f_+(x_1, -) \,\mathrm{d}\mu_2 - \int\limits_{X_2} \underbrace{(-f_-(x_1, -))}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\mu_2 & : \ \text{sonst} \end{cases}$

und $\varphi_{\pm f_\pm} = \int_{X_2} \pm f_\pm(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2)$ nach Satz 7 messbar sind und sogar integrierbar, da $f \in \mathcal{L}^1 \implies \pm f_\pm \in \mathcal{L}^1(X)$;

$|\varphi_f| \leq \varphi_{f_+} + \varphi_{-f_-} \implies \varphi_f \in \mathcal{L}^1(X_1)$ und $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X (-f_-) \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Satz 7}}{=}$

$$\int_{X_1} \varphi_{f_+} \,\mathrm{d}\mu - \int_{X_1} \varphi_{-f_-} \,\mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{X_1 \setminus N} \varphi_{f_+} \,\mathrm{d}\mu_1 - \int\limits_{X_1 \setminus N} \varphi_{-f_-} \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{X_1} \varphi_f \,\mathrm{d}\mu_1.$$

3) Es sei $f = g$ f.ü., N_f, N_g entsprechend 2);
$\forall x_1 \in X_1 \setminus (N_f \cup N_g) : \big|\varphi_f(x_1) - \varphi_g(x_1)\big| \leq \int_{X_2} \big|f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)\big| \,\mathrm{d}\mu_2(x_2)$
$\implies \int_{X_1} |\varphi_f - \varphi_g| \,\mathrm{d}\mu_1 \overset{\text{Satz 7}}{\leq} \int_X |f - g| \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Lemma 8 d)}}{=} 0$
$\implies$ (wiederum Lemma 8 d)) $\varphi_f = \varphi_g$ f.ü. $\square$

Bemerkung Bei Vertauschung von X_1, X_2 (d.h. $i_1 = 2,\ i_2 = 1$ in der Notation von Satz 7) folgt aus Satz 8, dass auch $\int_X F \,\mathrm{d}\mu = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} F(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$ falls $F \in L^1(X)$.

Bsp.:

1) $X_1 = X_2 = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ mit $\mu_i = \lambda\big|_{(0,1)}$,
$f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \longmapsto \dfrac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2)^3}$;

$$\begin{aligned} a :=& \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \\ =& \int\limits_{x_1=0}^{1} \int\limits_{x_2=0}^{1} \left(\frac{2x_1}{(x_1 + x_2)^3} - \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} \right) \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1 \\ =& \int\limits_{x_1=0}^{1} \left[\overbrace{-\frac{x_1}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{1}{x_1 + x_2}}^{= x_2/(x_1+x_2)^2} \right] \Bigg|_{x_2=0}^{1} \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x_1}{(x_1 + 1)^2} = -\frac{1}{x_1 + 1} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

andererseits ist $b := \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2) =$

$$= \int\limits_{x_2=0}^{1} \int\limits_{x_1=0}^{1} \frac{x_1 - x_2}{(x_1+x_2)^3}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \underset{\substack{x_1 \rightsquigarrow t_2\\ x_2 \rightsquigarrow t_1}}{=} \int\limits_{t_1=0}^{1} \int\limits_{t_2=0}^{1} (-1) f(t_1,t_2)\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 = -a = -\frac{1}{2}\,.$$

Offenbar ist der Satz von Fubini nicht anwendbar, da sonst $a = b$ sein müsste (vgl. die Bemerkung). Das kann nur daran liegen, dass $f \notin \mathcal{L}^1\big((0,1)^2\big)$.

Tatsächlich ist $\displaystyle\int\limits_{X_1 \times X_2} |f|\, \mathrm{d}\mu_1 \otimes \mathrm{d}\mu_2 \underset{\text{Satz 7}}{=} \int\limits_{x_1=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{x_2=0}^{1} \frac{|x_1 - x_2|}{(x_1+x_2)^3}\, \mathrm{d}x_2 \Bigg) \mathrm{d}x_1$

$$= \int\limits_{x_1=0}^{1} \Bigg(\int\limits_{x_2=0}^{x_1} \frac{x_1 - x_2}{(x_1+x_2)^3}\, \mathrm{d}x_2 + \int\limits_{x_2=x_1}^{1} \frac{x_2 - x_1}{(x_1+x_2)^3}\, \mathrm{d}x_2 \Bigg) \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \int\limits_{x_1=0}^{1} \Bigg[\frac{x_2}{(x_1+x_2)^2}\Bigg|_{x_2=0}^{x_1} - \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2}\Bigg|_{x_2=x_1}^{1} \Bigg] \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \int\limits_{x_1=0}^{1} \left(\frac{1}{4x_1} - \frac{1}{(x_1+1)^2} + \frac{1}{4x_1} \right) \mathrm{d}x_1 = \infty.$$

2) Für $f = [\tilde{f}],\ g = [\tilde{g}] \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ definiert man $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch $f * g := [\tilde{h}]$, wobei

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)\, \mathrm{d}y & : \quad \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n_y) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt: Das ist wohldefiniert, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ und $L^1(\mathbb{R}^n)$ wird mit $*$ eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra. Man nennt $*$ Faltung (engl. convolution).

Denn: $\varrho(x,y) := \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist messbar,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\varrho|\, \mathrm{d}(\lambda \otimes \lambda) \overset{\text{Satz 7}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \big|\tilde{f}(\underbrace{(x-y)}_{t})\big|\, \mathrm{d}x \right)}_{=\|f\|_1} \big|\tilde{g}(y)\big|\, \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$\overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \tilde{h} \in \mathcal{L}^1$ und $\|f * g\|_1 = \displaystyle\int |\tilde{h}|\, \mathrm{d}\lambda \leq \int |\varrho|\, \mathrm{d}(\lambda \otimes \lambda) = \|f\|_1 \|g\|_1$. Bei anderer Wahl von $\tilde{f}, \tilde{g}$ ändert sich ϱ nur auf einer Nullmenge $\overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} [\tilde{h}] \hat{=} [\varphi_\varrho]$ bleibt gleich.

Übungen zu § 1

1) Zeige, dass für ein Maß μ gilt:

   a) $\forall A \subset B \in \Sigma : \mu(A) \leq \mu(B)$

   b) $\forall A_1, A_2, \dots \in \Sigma : \mu\big(\bigcup_i A_i\big) \leq \sum_i \mu(A_i)$

   c) $\forall A, B \in \Sigma : \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
   (falls $\mu(A \cap B) < \infty$, sonst mit $\infty + \infty - \infty := \infty$)

   d) $\forall A_1, \cdots, A_n \in \Sigma$ mit $\forall i : \mu(A_i) < \infty$:
   $\mu\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - + \cdots$
   $\cdots + (-1)^{n-1} \mu\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big)$

2) a) Zeige, dass $\mu\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$ für $A_i \in \Sigma,\ A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, wenn $\mu(A_1) < \infty$ und speziell wenn μ ein <u>endliches Maß</u> ist, d.h. $\mu(X) < \infty$.

   b) Gib ein Gegenbeispiel zur Gleichung in a), wenn $X = \mathbb{R},\ \mu = \lambda$.

3) a) Es sei X beliebig, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ und $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : A \longmapsto \#A$.
   Zeige, dass μ ein Maß ist. (μ heißt <u>Zählmaß</u>.)
   Für welche X ist μ σ-endlich?

   b) Es sei speziell $X = \mathbb{R}^n$.
   Zeige, dass μ translationsinvariant ist (d.h. $\forall A \in \Sigma : \forall a \in X : \mu(a + A) = \mu(A)$), aber kein (lokalendliches) Borelmaß, weil $\exists K$ kompakt: $\mu(K) = \infty$.

4) a) Leite $\forall A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} : \overline{\lambda}(A) = \sup\big\{\overline{\lambda}(K);\ A \supset K \text{ kompakt}\big\}$ aus
   $\overline{\lambda}(A) = \inf\big\{\overline{\lambda}(U);\ A \subset U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}\big\},\ \forall A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$, her.

   b) Zeige: $A \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \iff \exists K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ kompakt: $\exists N \in \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ mit
   $\overline{\lambda}(N) = 0 : A = N \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

5) a) Zeige: $\forall U \subset \mathbb{R}^n$ offen: $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$
   (def. in Seite 3) paarweise disjunkt: $U = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i$.
   Hinweis: Nehme A_i aus $\Big\{\prod_{l=1}^{n} [a_l, a_l + 2^{-j});\ a_l \cdot 2^j \in \mathbb{Z}\Big\} =: \mathcal{F}_j,\ j \in \mathbb{N}$.

   b) Zeige, dass das Lebesgue-Borelmaß λ das einzige Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, das verschiebungsinvariant ist und $\lambda\big([0,1)^n\big) = 1$ erfüllt.

6) X sei ein hausdorffscher topologischer Raum,
$x \in X$ und $\delta_x^{\mathrm{nv}} : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ : A \longmapsto \begin{cases} 1 & : \quad x \in A \\ 0 & : \quad x \notin A. \end{cases}$.
Zeige, dass $\overline{\mathcal{B}(X)} = \mathcal{P}(X)$ und $\overline{\delta_x^{\mathrm{nv}}} = \delta_x$ von Seite 3.

7) $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{q_1, q_2, \cdots\}$ sei eine gewählte Anordnung und
$U := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-n-2},\ q_n + 2^{-n-2}) \cap (0,1)$.
Zeige, dass $\lambda(U) \leq \dfrac{1}{2},\ \overline{U} = [0,1],\ \lambda(\partial U) \geq \dfrac{1}{2}$, und daher U nicht quadrierbar ist.

8) Es sei $A = \big\{x \in [0,1];$ in der Dezimalentwicklung von x (ohne $\dot{9}$) kommt 7 nicht vor$\big\}$
(eine „Cantormenge").
Zeige: $A \in \mathcal{B}\big([0,1]\big),\ \lambda(A) = \lambda(\overline{A}) = 0,\ A$ ist überabzählbar.

9) X sei ein topologischer Raum und $Y \in \mathcal{B}(X)$ trage die Spurtopologie.
Zeige, dass dann $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

10) Zeige die 2 Aussagen in Seite 3 unten, d.h.

a) $\forall A \in \mathcal{G} : \exists A_i \in \mathcal{F} : A = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{k}} A_i$.

b) $\mathcal{G}$ ist ein Ring.

11) Zeige: $A, B_1, \cdots, B_m \in \mathcal{F},\ A = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{m}} B_i \implies |A| = \sum\limits_{i=1}^{m} |B_i|$ (vgl. Seite 3, b)).

Übungen zu § 2

1) a) Es seien $f, f_k \in \mathcal{L}_+(X)$ mit $f \geq f_k$ und $f = \sup\limits_k f_k$.

Warum ist i.a. $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu > \sup_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu$?

(Die „Monotonie“ in Satz 2 ist also wesentlich.)

b) Zeige: $\forall f \in \mathcal{L}_+(X) : \displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int g \,\mathrm{d}\mu;\ g \in \mathcal{E},\ g \leq f\right\}$

c) Es seien $f_i \in \mathcal{L}_+(X)$ mit $f_1 \geq f_2 \geq \cdots$, $f := \inf\limits_k f_k$, und $\displaystyle\int f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Zeige, dass dann $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = \inf_k \int f_k \,\mathrm{d}\mu$.

d) Warum ist die Voraussetzung $\displaystyle\int f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$ in c) nötig?

Gib ein Gegenbeispiel an, wenn $\displaystyle\int f_1 \,\mathrm{d}\mu = \infty$!

2) Es sei $X = \mathbb{N},\ \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu =$ Zählmaß (§ 1, Übung 3).

a) Zeige, dass $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}) = L^1(\mathbb{N}) = \left\{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty\right\}$

(Die Vollständigkeit von ℓ^1 folgt also auch aus Satz 5.)

b) Zeige, dass der Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen (d.h. $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1,\ i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv $\implies \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i(j)}$) aus dem Satz von Lebesgue folgt.

Hinweis: Setze $f \hat{=} (a_j)_{j\in\mathbb{N}},\ g \hat{=} \big(|a_j|\big)_{j\in\mathbb{N}}$,

$$f_k = f \cdot \chi_{\{i(1),\cdots,i(k)\}} \hat{=} \left(\begin{cases} a_j & : \ j \in \{i(1), \cdots, i(k)\} \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

3) Verwende den Satz von Lebesgue, um ⊛ in

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (-x)^j \,\mathrm{d}x \overset{\circledast}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 (-x)^j \,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}$$

zu rechtfertigen. (Was sind hier f_k und g?)

Ist $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-x)^j$ auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent?

4) Stelle $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha} \ln(1-x) \,\mathrm{d}x,\ \alpha > -2$, durch eine Reihe dar! (Verwende den Satz von Levi!)

5) Sei $f_k(x) = kx^k,\ x \in X = [0,1]$. Zeige $f_k \to 0$ f.ü. auf X, aber $\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \to 1$. Warum ist der Satz von Lebesgue nicht anwendbar?

6) a) Zeige, dass $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(Hinweis: Substitution $t = x - y$)

b) Zeige, dass h $\mathcal{C}^\infty$ ist!

c) Was passiert, wenn nur über $[0,\infty)$ integriert wird?

7) a) Zeige $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2y},\ y > 0$ (Substitution $x = yt$)!

b) Differenziere a) (mit dem Satz von Lebesgue) und schließe (mit Induktion)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^n} = \frac{\pi}{2y^{2n-1}} \cdot \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-3)}{2\cdot 4 \cdots (2n-2)}\,, y > 0.$$

8) Es sei $h(y) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2/x^2)}\,\mathrm{d}x$ für $y \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass h stetig ist und $h(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Zeige, dass h in $y \neq 0$ differenzierbar ist.

c) Zeige (mit der Substitution $x = \frac{y}{t}$) $h'(y) = -2h(y)$ für $y > 0$, und folgere, dass $h(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{-2|y|},\ y \in \mathbb{R}$.

9) (X,Σ,μ) sei ein Maßraum, $1 < p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeige:

a) $\forall f,g \in \mathcal{L}_+(X): \int_X f\cdot g\,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} =: \|f\|_p \cdot \|g\|_q$
(mit $0\cdot\infty := 0$) (Hölder)
Hinweis: Betrachte zuerst den Fall $\|f\|_p \cdot \|g\|_q \in \{0,\infty\}$, setze im anderen Fall $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p},\ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$ und verwende $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ für $a,b \ge 0$.

b) $\forall f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar: $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \in \overline{\mathbb{R}}_+$. (Minkowski)

c) $\mathcal{L}^p(X) := \big\{f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar; $\|f\|_p < \infty\big\}$ ist ein Vektorraum und
$L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)/\big\{f \in \mathcal{L}^p(X); \|f\|_p = 0\big\}$ ist ein Banachraum.
Hinweis: Definiere g wie in Seite 16 und zeige (mit Levi), dass $\|g\|_p < \infty$.

10) Der Substitutionssatz bzgl. $\overline{\lambda}$ besagt:

Satz 9
$D, \tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mu = \overline{\lambda},\ g : \tilde{D} \longrightarrow D\ \mathcal{C}^1$, bijektiv mit $\forall y \in \tilde{D} : \det g'(y) \neq 0$.
Dann gilt:

1) $\forall f \in \mathcal{L}_+(D) : \displaystyle\int_D f(x)\,\mathrm{d}\overline{\lambda}(x) \underset{\circledast}{=} \int_{\tilde{D}} f\big(g(y)\big) \cdot \big|\det g'(y)\big|\,\mathrm{d}\overline{\lambda}(y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

2) $\forall f \in \mathcal{L}^1(D) : f \circ g \cdot |\det g'| \in \mathcal{L}^1(\tilde{D})$ und $\circledast$ gilt.

<u>Beweise dies wie folgt:</u>

a) 1) impliziert 2).

b) Es genügt $\circledast$ für $f \in \mathcal{E}$ zu zeigen.

c) Es genügt $\circledast$ für $f = \chi_A,\ A \in \overline{\mathcal{B}(D)}$ zu zeigen.

d) $\circledast$ gilt für $f = \chi_A$, wenn

   i) $A = \displaystyle\prod_{l=1}^{n} [a_l, b_l] \subset D$; (Hinweis: Analysis 3)

   ii) $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{P}(D),\ \mathcal{G}$ wie in Seite 3;

   iii) $A \subset D$ offen; (Hinweis: § 1, Übung 5)

   iv) $A \subset D$ kompakt; (Hinweis: $A = U \setminus V,\ V \subset U \subset D$ offen, U beschränkt)

   v) $A \in \mathcal{B}(D)$; (Hinweis: Regularität von λ)

   vi) $A \in \overline{\mathcal{B}(D)}$.

Übungen zu § 3

1) Es sei $X_i = [0, \infty)$ mit $\mu_i = \lambda,\ i = 1, 2$.

   a) Zeige mit Fubini & Tonelli: $\forall g \in \mathcal{L}_+(X_1) \cup \mathcal{L}^1(X_1)$:

   $$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{g(y)}{y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty g(y)\, \mathrm{d}y$$

   b) Ist a) im Fall $h = \sin$ anwendbar?

   c) Zeige $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 1$, wenn die Integrale als uneigentliche Riemannintegrale aufgefasst werden.

   Hinweis: Setze $h(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y$, integriere $\displaystyle\int_0^N 1 \cdot h(x)\, \mathrm{d}x$ partiell und bestimme das Verhalten von $h(N),\ N \to \infty$, durch partielle Integration in $\displaystyle\int_N^\infty \frac{1}{y} \cdot \sin y\, \mathrm{d}y$.

2) Sei $X = [0, 1] \times [1, \infty)$ mit $\mu = \lambda$ und $f(x, y) = \mathrm{e}^{-xy} - 2\mathrm{e}^{-2xy} \in \mathcal{L}(X)$.

   a) Zeige: $A := \displaystyle\int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=1}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x > 0$ und

   $B := \displaystyle\int\limits_{y=1}^{\infty} \left(\int\limits_{x=0}^{1} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y < 0$

   b) Ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$?

   c) Zeige: $A - B = \ln 2$ Hinweis: $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$

   d) Zeige: $\forall g \in \mathcal{L}^1\big([0, \infty)\big)$ und $G(x) := \displaystyle\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$ gilt

   $$\forall a, b > 0 : \int_0^\infty \frac{G(bx) - G(ax)}{x}\, \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \int_0^\infty g(x)\, \mathrm{d}x$$

   (Formel von Cauchy-Frullani)

3) Zeige, dass $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \otimes \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \subsetneq \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)}$, wenn wie immer $\overline{}$ die Vervollständigung bzgl. des Lebesgue-Borelmaßes λ auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.