Kapitel III: Grundlagen

3.1 Quasilineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Schreibweise: $\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}\,, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$

Def.:
$c_1(x,u)\partial_1 u + \cdots + c_n(x,u)\partial_n u = g(x,u)$ heißt **quasilineare Differentialgleichung 1. Ordnung**. Wenn $c_1, \ldots, c_n$ von u unabhängig sind und $g(x,u) = a(x) + b(x)u$, so heißt sie **linear**. Wenn $g \equiv 0$, so heißt sie **homogen**.

Bemerkungen: 1) Eine homogene, lineare Dgl. 1. Ordnung $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x)\partial_j u = 0$ wird also durch $c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}$, $x \in V \subset \mathbb{R}^n$ offen, gegeben. In der Differentialgeometrie entsteht diese Situation nach Wahl von Koordinaten auf einer $\mathcal{C}^1$–Mannigfaltigkeit M, d.h. $W \subset M$ offen, $x : W \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Abschnitt verwende ich daher die Summenkonvention und schreibe die Indizes bei x und bei Vektorfeldern in der Höhe. Somit gilt für $X \in \mathcal{T}^1(M)$ auf $W : X = c^j \dfrac{\partial}{\partial x^j} = c^j \partial_j$ und die Dgl. schreibt sich $X(u) = c^j(x)\dfrac{\partial u}{\partial x^j} = 0$ für $u \in \mathcal{C}^1(M)$.

2) Wenn $X(u) = 0$, so ist u i.A. bereits durch seine "Anfangswerte" auf einer $(n-1)$–dimensionalen Hyperfläche festgelegt. Wenn z.B. $X = \partial_1$, so ist $X(u) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x^1} = 0 \Longleftrightarrow u(x) = u(0, x^2, \ldots, x^n) = u_0(x^2, \ldots, x^n)$, d.h. u durch seine Werte auf $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ festgelegt. Die allgemeine Situation kann auf diesen Fall reduziert werden. Dazu zunächst eine Wiederholung:

Satz über die lokale Lösbarkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen (SLLD)

$V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{C}^\ell,\ \ell \geq 1,\ \xi_0 \in V$. Dann:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \xi \in V \text{ mit } |\xi - \xi_0| < \varepsilon : \exists!\, x_\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow V\, \mathcal{C}^{\ell+1},$$

sodass

(a) $x_\xi(0) = \xi$

$\wedge$ (b) $\forall\, t$ mit $|t| < \varepsilon : \dot{x}_\xi(t) = c\big(x_\xi(t)\big)$

$\wedge$ (c) $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \big\{\xi \in V : |\xi - \xi_0| < \varepsilon\big\} \longrightarrow V$ ist $\mathcal{C}^\ell$.
$\qquad (t, \xi) \longmapsto x_\xi(t)$

Bemerkungen 1) $x_\xi(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$ ist also die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x}^j(t) = c^j\big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$ und $x^j(0) = \xi^j$.
2) Lipschitzstetigkeit von c, d.h. $\exists C > 0 : \big|c(\xi_1) - c(\xi_2)\big| < C|\xi_1 - \xi_2|$ für ξ_i bei ξ_0 würde anstelle von $c \in \mathcal{C}^1$ auch genügen. Stetigkeit von c wäre zu wenig, um die Eindeutigkeit ($\exists!\, x_\xi$) zu sichern: $\forall\, a \geq 0$ lösen $x(t) = \frac{1}{4}(t-a)_+^2$ die Differentialgleichung $x(0) = 0$ und $\dot{x} = c(x)$ für $c = \sqrt{|x|}$ (wobei $s_+ := y(s) \cdot s = \begin{cases} s : s \geq 0 \\ 0 : s \leq 0 \end{cases}$ für $s \in \mathbb{R}$).

Satz und Definition:
$X = c^j(x)\partial_j$ sei ein $\mathcal{C}^\ell$–Vektorfeld auf $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\ell \geq 1$. Dann gilt:

1) $\exists U \subset \mathbb{R} \times V$ offen mit $U \supset \{0\} \times V$ und
$\exists\, F : U \longrightarrow V : (t, \xi) \longmapsto F(t, \xi)$ $\mathcal{C}^\ell$ sodass

   (a) $\forall\, \xi \in V : F(0, \xi) = \xi$

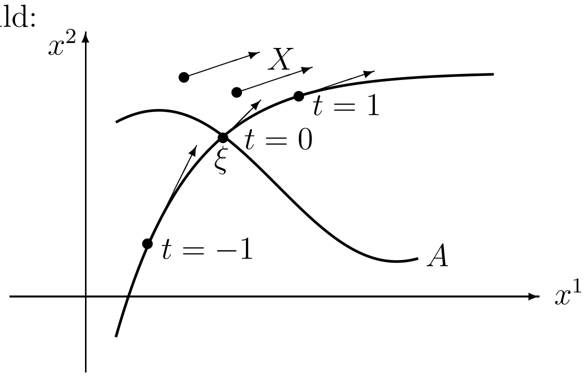
   $\wedge$ (b) $\forall\, (t, \xi) \in U : \dfrac{\partial F(t, \xi)}{\partial t} = c\big(F(t, \xi)\big)$.

   In einer Umgebung von $0 \times V$ ist F eindeutig und heißt **Fluss(abbildung)** zu X. Die Kurve $t \longmapsto F(t, \xi) = x_\xi(t)$ heißt **Charakteristik** oder **Integralkurve** von X durch ξ.

2) Eine $(n-1)$–dimensionale $\mathcal{C}^1$–Untermannigfaltigkeit A von V heißt **nicht-charakteristisch** $\Longleftrightarrow \forall\, \xi \in A$ ist die Charakteristik durch ξ nicht tangential an A, d.h. $\forall\, \xi \in A : c(\xi) \notin T_\xi A$.

3) Wenn A $\mathcal{C}^\ell$ und nicht-charakteristisch ist, $u_0 \in \mathcal{C}^\ell(A)$ so $\exists!\, \mathcal{C}^\ell$–Lösung u von $X(u) = 0$, $u\big|_A = u_0$ lokal bei A, und u ist gegeben durch $u\big(F(t, \xi)\big) = u_0(\xi)$ für $\xi \in A$, t klein.

Bild:



Charakteristik durch ξ,
konstanter u–Wert.

$X(u) = 0 \Longleftrightarrow u\big(u_\xi(t)\big) = u_0(\xi), \xi \in A$

Beweis 1) Setze $F(t,\xi) := x_\xi(t)$ im SLLD.
3) Wenn A nicht-charakteristisch ist, so ist bei
$\xi_0 \in A$ $F_0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{\xi \in A : |\xi - \xi_0| < \varepsilon\} \longrightarrow V$ umkehrbar,
$$(t,\xi) \longmapsto F(t,\xi)$$
denn $\det(JF_0)(0,\xi_0) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y^n}\right)(0,\xi_0) \neq 0$, da $\frac{\partial F}{\partial t}(0,\xi_0) = c\big(F(0,\xi_0)\big) = c(\xi_0) \notin T_{\xi_0}A = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \frac{\partial F}{\partial y^2}(0,\xi_0), \ldots, \frac{\partial F}{\partial y^n}(0,\xi_0) \right\rangle$ wenn $y^1, y^2, \ldots, y^n$ Koordinaten auf V bei ξ_0 sind, in denen A durch $y^1 =$ konstant gegeben ist.
Also ist u durch $u\big(F_0(t,\xi)\big) = u_0(\xi),\ \xi \in A$, wohldefiniert bei ξ_0.

Schließlich gilt für $\xi \in A$ und $x = F(t,\xi)$:
$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_0(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\big(F(t,\xi)\big) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial F^j}{\partial t}(t,\xi) = \big\langle \nabla u, \dot{x}_\xi(t) \big\rangle = \big\langle \nabla u, c(x) \big\rangle = X(u)(x).$$
Umgekehrt gelesen liefert das, dass $X(u) = 0$ die Gleichung $u\big(F(t,\xi)\big) =$ konstant bzgl. t impliziert, und daher ist u eindeutig bestimmt lokal bei A. $\square$

Bemerkungen: 1) $X(u) = 0$ bedeutet also, dass u konstant auf den Charakteristiken ist. Wenn wir bei $\xi_0 \in A$ $z^1 := t \circ F_0^{-1},\ z^2 := y^2 \circ F_0^{-1}, \ldots,\ z^n := y^n \circ F_0^{-1}$ als neue Koordinaten verwenden, so ist mit $\eta = F(s,\xi),\ \xi \in A$, auch $F(t,\eta) = F_0(s+t,\xi)$ (aufgrund der Eindeutigkeit in SLLD) und daher
$$z\big(F(t,\eta)\big) = z\big(F_0(s+t,\xi)\big) = \begin{pmatrix} s+t \\ y^2(\xi) \\ \vdots \\ y^n(\xi) \end{pmatrix},$$
$X(\eta) = [t \mapsto F(t,\eta)] = \left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)_\eta$, vgl. S. 1, Bem. 2.

2) In den Koordinaten z^j können wir auch leicht das folgende inhomogene Anfangswertproblem lösen: $X(u) = g(x,u) \wedge u\big|_A = u_0 \iff \frac{\partial u}{\partial z^1} = g(z,u) \wedge u\big|_A = u_0 \iff \forall \zeta = (z^2, \ldots, z^n) \in A$ ist $u_\zeta(t) := u(t, z^2, \ldots, z^n)$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen $\dot{u}_\zeta = g(t, z^2, \ldots, z^n, u_\zeta)$ mit $u_\zeta(0) = u_0(\zeta)$.

3) Schließlich kann man den quasilinearen Fall leicht auf den linearen zurückführen: Wir betrachten u als $(n+1)$–te Variable x^{n+1} und setzen $\tilde{X} := \sum_{j=1}^n c^j(x,u)\partial_j + g(x,u)\partial_{n+1}$ im $\mathbb{R}^{n+1}_{x,u}$.
Wenn $U(x,u)$ eine Lösung von $\tilde{X}(U) = 0$ ist mit $U\big(\xi, u_0(\xi)\big) = 0,\ \xi \in A$, und $u(x)$ durch Auflösung von $U(x,u) = 0$ nach u um $\big(\xi_0, u_0(\xi_0)\big),\ \xi_0 \in A$, entsteht, so ist $u(\xi) = u_0(\xi)$ für

$\xi \in A$ bei ξ_0 und mit $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$ gilt

$$0 = \nabla\Big[U\big(x, u(x)\big)\Big] = (\nabla U)\big(x, u(x)\big) + \frac{\partial U}{\partial u}\big(x, u(x)\big) \cdot \nabla u(x)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{X}(U) = \big\langle c(x,u), \nabla U \big\rangle + g(x,u)\frac{\partial U}{\partial u} = \\ &= \frac{\partial U}{\partial u}\Big(- \big\langle c(x,u), \nabla u \big\rangle + g(x,u)\Big), \end{aligned}$$

d.h. die Differentialgleichung ist erfüllt, falls $\dfrac{\partial U}{\partial u}\big(x, u(x)\big) \neq 0$. Letzteres ist der Fall, wenn wir z.B. $U(\xi, u) = u - u_0(\xi)$ für $\xi \in A,\ u$ bei $u_0(\xi)$ vorschreiben. Dann ist $\tilde{A}$ eine Umgebung von $\Big\{\big(\xi, u_0(\xi)\big) : \xi \in A\Big\}$ in $A \times \mathbb{R}$ und daher $T_{\left(\xi, u_0(\xi)\right)}\tilde{A} = T_\xi A \times \mathbb{R}$ und $\tilde{A}$ nicht-charakteristisch $\iff \forall\, \xi \in A : c\big(\xi, u_0(\xi)\big) \notin T_\xi A$. In diesem Fall nennen wir (A, u_0) **nicht-charakteristisch**.

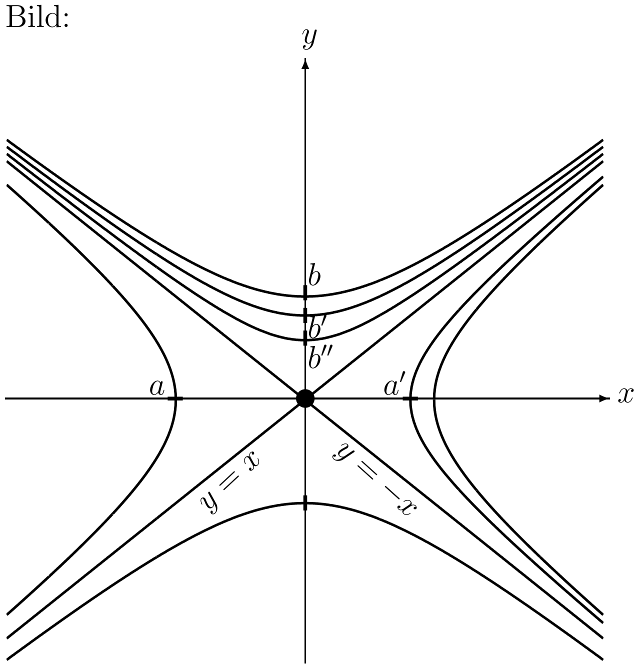
Beispiel Ich schreibe hier $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ statt $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, y_1, y_2, z_1, z_2$ statt $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, y^1, y^2, z^1, z^2$.

1) Die Differentialgleichung sei $y\partial_x u + x\partial_y u = 0$, d.h. $c(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$; die Charakteristiken $\vec{x}_{\vec{\xi}}(t) =: \vec{x}(t)$ erfüllen $\vec{x}(0) = \vec{\xi}$ und $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \vec{x}(t)$;

$$\begin{aligned} B^2 = I \implies \vec{x}_{\vec{\xi}}(t) &= \mathrm{e}^{Bt}\vec{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n t^n}{n!}\,\vec{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{B^{2k}}^{I}\, t^{2k}}{(2k)!}\,\vec{\xi} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{B^{2k+1}}^{B}\, t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\vec{\xi} \\ &= (\operatorname{ch} t \cdot I + \operatorname{sh} t \cdot B)\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \operatorname{ch} t + \eta \operatorname{sh} t \\ \eta \operatorname{ch} t + \xi \operatorname{sh} t \end{pmatrix} = F(t, \vec{\xi}), \text{ wobei } \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Charakteristiken sind also Hyperbeln, z.B. $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{x}_{\vec{\xi}}(t) = a\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$ liegt auf $x^2 - y^2 = a^2$ und $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \implies \vec{x}_{\vec{\xi}}(t) = b\begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ liegt auf $y^2 - x^2 = b^2$; auch der Ursprung und $y = \pm x$ sind Charakteristiken. Außerhalb des Ursprungs sind die x– und y–Achse nicht-charakteristisch.

Bild:



„Sattelpunkt“

Wenn $A = (x\text{–Achse}) \setminus 0$, so ist z.B. $y_1 = y,\ y_2 = x$,

$$F_0 : \mathbb{R} \times A \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (t, \xi) \longmapsto \begin{pmatrix} \xi \operatorname{ch} t \\ \xi \operatorname{sh} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow\ z_1 = t = \operatorname{arth}\left(\dfrac{y}{x}\right),\ z_2 = \xi = \operatorname{sign}(x)\sqrt{x^2 - y^2}$; das sind Koordinaten in $\left\{\binom{x}{y} : |x| > |y|\right\}$ und dort gilt $X := y\partial_x + x\partial_y = \dfrac{\partial}{\partial z_1}$ (vgl. Bem. 1, S. 3) und $X(u) = 0,\ u\big|_A = u_0 \Longleftrightarrow u(z_1, z_2) = u_0(z_2)$, d.h. $u(x, y) = u_0\big(\operatorname{sign}(x)\sqrt{x^2 - y^2}\,\big)$

2) a) Wenn $y\partial_x u + x\partial_y u = u^2,\ u(x, 0) = u_0(x)$, so lösen wir zuerst $\dfrac{\partial u}{\partial z_1} = u^2,\ u(0) = u_0(z_2)$ (vgl. Bem. 2, S. 3).
Das liefert $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int \mathrm{d}z_1,\ -\frac{1}{u} = z_1 + C,\ u = -\frac{1}{z_1 + C}\,,\ u(0) = -\frac{1}{C} = u_0(z_2)$

$$\Longrightarrow\ u(z) = -\frac{1}{z_1 - 1/u_0(z_2)} = \frac{u_0(z_2)}{1 - z_1 u_0(z_2)}$$

$$\Longrightarrow\ u(x, y) = \frac{u_0\big(\operatorname{sign}(x)\sqrt{x^2 - y^2}\,\big)}{1 - \operatorname{arth}\left(\frac{y}{x}\right) u_0\big(\operatorname{sign}(x)\sqrt{x^2 - y^2}\,\big)}\,.$$

b) Die Behandlung entsprechend Bem. 3, S. 3 ist dazu äquivalent: $\tilde{c} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ u^2 \end{pmatrix}$ in den

Koordinaten $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} \implies$ die Charakteristiken erfüllen die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ u^2 \end{pmatrix} \implies \vec{x}_{\vec{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} \xi \operatorname{ch} t + \eta \operatorname{sh} t \\ \eta \operatorname{ch} t + \xi \operatorname{sh} t \\ \zeta/(1 - t\zeta) \end{pmatrix} \text{ wobei } \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix};$$

mit dem Anfangswert $U(\xi, 0, \zeta) = \zeta - u_0(\xi)$, vgl. S. 4, erhalten wir mit $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ \zeta \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} U(x, y, u) &= U\big(\xi \operatorname{ch} t, \xi \operatorname{sh} t, \zeta/(1 - t\zeta)\big) = U\big(\vec{x}_{\vec{\xi}}(t)\big) = \\ &= U\big(\vec{x}_{\vec{\xi}}(0)\big) = U(\xi, 0, \zeta) = \zeta - u_0(\xi) \end{aligned}$$

und daher ist $U(x, y, u) = 0$ äquivalent zu $\zeta = u_0(\xi)$ bzw. $u = \dfrac{\zeta}{1 - t\zeta} = \dfrac{u_0(\xi)}{1 - tu_0(\xi)} = \dfrac{u_0\big(\operatorname{sign}(x)\sqrt{x^2 - y^2}\,\big)}{1 - \operatorname{arth}\left(\frac{y}{x}\right) u_0\big(\operatorname{sign}(x)\sqrt{x^2 - y^2}\,\big)}$.

3.2 Klassifikation von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Def.:
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x, u, \nabla u) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = g(x, u, \nabla u)$ heißt **quasilineare Differentialgleichung 2. Ordnung**. Wenn alle c^{ij} von $u, \nabla u$ unabhängig sind und g linear 1. Ordnung ist, so heißt sie **linear**. Wenn $g \equiv 0$, heißt sie **homogen**.

Bemerkungen 1) OEdA kann immer $c^{ij} = c^{ji}$ vorausgesetzt werden, da $\partial_i \partial_j u = \partial_j \partial_i u$ (Satz von Schwarz).

2) $y^1, \ldots, y^n$ seien Koordinaten bei $x_0 \in \mathbb{R}^n \implies$

$$\frac{\partial u}{\partial x^j} = \frac{\partial u}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^k \partial y^l} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} + \frac{\partial u}{\partial y^k} \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Die lineare Differentialgleichung $c^{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \cdots = 0$ geht daher über in die lineare Differentialgleichung $\tilde{c}^{kl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^k \partial y^l} + \cdots = 0$ mit $\tilde{c}^{kl} = c^{ij} \cdot \dfrac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \dfrac{\partial y^l}{\partial x^j}$. (Drei Punkte bezeichnen hier und im Folgenden Terme in x, u und ∇u.) In einem festen Punkt x_0 können wir bereits durch lineare Koordinatentransformation die Diagonalform $(\tilde{c}^{kl}) = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & -I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ erreichen, wobei I_a die $a \times a$–Einheitsmatrix bezeichnet (Satz v. Sylvester). a, b sind durch $\big(c^{ij}(x_0)\big)$ eindeutig bestimmt. ($a + b$ bzw. $a - b$ heißen Rang bzw. Signatur der reellwertigen, symmetrischen Matrix $\big(c^{ij}(x_0)\big)_{i,j}$.) Alle diese Zahlen hängen natürlich von x_0 ab.

Def.:
Die reelle lineare Differentialgleichung 2. Ordnung $c^{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \cdots = 0$ heißt im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(a) **elliptisch** $\Longleftrightarrow \big(c^{ij}(x_0)\big)$ ist positiv oder negativ definit $\Longleftrightarrow a + b = n \wedge a \cdot b = 0$;

(b) **hyperbolisch** $\Longleftrightarrow c^{ij}(x_0)\partial_i \otimes \partial_j \in (T_{x_0}\mathbb{R}^n)^{\otimes 2}$ ist eine Lorentz (co–)Metrik
$\Longleftrightarrow a + b = n \wedge (a = 1 \vee b = 1)$

(c) **parabolisch** $\Longleftrightarrow a + b = n - 1 \wedge a \cdot b = 0$

Bsp. Die Laplacegleichung $\Delta_n u = 0$ (im $\mathbb{R}^n$), die Wellengleichung $(\partial_t^2 - \Delta_n)u = 0$ (im $\mathbb{R}^{n+1}$), bzw. die Wärmeleitungsgleichung $(\partial_t - \Delta_n)u = 0$ (im $\mathbb{R}^{n+1}$) sind die Paradigmen überall elliptischer, hyperbolischer, bzw. parabolischer Gleichungen. Hingegen ist die Gleichung von Tricomi

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ in } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \begin{cases} \text{elliptisch} & : \; y_0 > 0, \\ \text{parabolisch} & : \; y_0 = 0, \\ \text{hyperbolisch} & : \; y_0 < 0. \end{cases}$$

Der „ultrahyperbolische“ Operator $\Delta_n - \Delta_m$ (im $\mathbb{R}^{n+m}, n, m \geq 2$) ist weder noch.

Im Folgenden betrachten wir lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung **in zwei Variablen**. Diese kann man auf kanonische Form nicht nur in einem Punkt, sondern in einer ganzen Umgebung davon bringen. (In ≥ 3 Variablen ist das nicht mehr möglich.) Zur Vereinfachung schreibe ich wieder $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ und setze $P(x, y, \partial_x, \partial_y) = a(x, y)\partial_x^2 + 2b(x, y)\partial_x\partial_y + c(x, y)\partial_y^2 + \cdots$.

Satz 1
$P(x, y, \partial_x, \partial_y)$ sei linear, 2. Ordnung, mit reellen $\mathcal{C}^2$–Koeffizienten und **hyperbolisch** in $\vec{x}_0$. Dann gibt es $\mathcal{C}^2$–Koordinaten ξ, η bei $\vec{x}_0$, in denen $P(\vec{x}, \partial)u = 0$ die Form $(\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2 + \cdots)u = 0$ hat.

Beweis a) nach S. 6 ist in den neuen Koordinaten $P(\vec{\xi},\partial) = \tilde{a}\partial_\xi^2 + 2\tilde{b}\partial_\xi\partial_\eta + \tilde{c}\partial_\eta^2 + \cdots$ mit $\tilde{a} = a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \nabla\xi^T \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{A} \nabla\xi,$

$\tilde{b} = \nabla\xi^T \cdot A \cdot \nabla\eta,\ \tilde{c} = \nabla\eta^T \cdot A \cdot \nabla\eta.$

Wenn es gelingt, ξ,η so zu wählen, dass $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, so ist $P = 2\tilde{b}\partial_\xi\partial_\eta + \cdots$. Wegen $\tilde{b}(\vec{x}_0) \neq 0$ (da sonst P in $\vec{x}_0$ nicht hyperbolisch wäre) ist dann $Pu = 0$ äquivalent zu $(\partial_\xi\partial_\eta + \cdots)u = 0$ und die Substitution $\hat{\xi} := \xi + \eta,\ \hat{\eta} := \xi - \eta$ liefert $(\partial_{\hat{\xi}}^2 - \partial_{\hat{\eta}}^2 + \cdots)u = 0$.

b) OEdA sei $a(\vec{x}_0) \neq 0$. Da P in $\vec{x}_0$ hyperbolisch ist, gilt $d := -\det A = b^2 - ac > 0$ in einer Umgebung von $\vec{x}_0$. Daher ist $\tilde{a} = a \cdot \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$ mit $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{a}$ ($\mathcal{C}^2$–Funktionen in x,y [1], Lösungen von $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$)
ξ bzw. η seien die Lösungen von $\frac{\partial\xi}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0$ bzw. $\frac{\partial\eta}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$ zu den Anfangswerten $\xi(x_0,y) = \eta(x_0,y) = y$ auf der nicht-charakteristischen Geraden $x = x_0$. Dann gilt $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$. Weiters sind ξ,η $\mathcal{C}^2$ und Koordinaten bei $\vec{x}_0$, denn

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 \text{ in } \vec{x}_0,$$

da $\frac{\partial\xi}{\partial y}(\vec{x}_0) = \frac{\partial\eta}{\partial y}(\vec{x}_0) = 1$ und $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\sqrt{d}}{a}$. $\square$

Wenn wir wieder u statt ξ bzw. η schreiben, so spielt die (nicht-lineare) Differentialgleichung 1. Ordnung $a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ eine wichtige Rolle im obigen Beweis.

Def.:

(Hier ist wieder $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ etc.) Ein **linearer Differentialoperator** m**–ter Ordnung im** $\mathbb{R}^n$ hat die Form $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x)\partial^\alpha$, wobei $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ und $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, c_α komplexwertige Funktionen auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ sind, und $\exists\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m$ und $c_\alpha \not\equiv 0$. Wenn alle c_α reellwertig sind, heißt P **reell**. Der Operator $P_{\mathrm{pr}}(x,\partial) := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)\partial^\alpha$ heißt **Hauptteil** von P. Die Differentialgleichung 1. Ordnung

[1] Bedeutung von λ_j : $\binom{\lambda_j}{1}$ sind isotrope Vektoren von A

$P_{\mathrm{pr}}(x, \mathrm{d}u) = \sum\limits_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)(\partial_1 u)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n u)^{\alpha_n} = 0$ heißt **charakteristische Differentialgleichung** zu P. Eine $\mathcal{C}^1$–Hyperfläche $A \subset V$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{charakteristisch} \\ \textbf{nicht-charakteristisch} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \forall x \in A : P_{\mathrm{pr}}(x, N_x) \left\{ \begin{array}{c} = 0 \\ \neq 0 \end{array} \right\}$$

wobei $T_x A = N_x^\perp = \{y; N_x y = 0\},\ N_x \in T_x^* \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

Bsp. 1) Wenn P linear, homogen 1. Ordnung ist, so ist $P = P_{\mathrm{pr}}$ und die charakteristische Differentialgleichung ist $P(x, \partial)u = 0$. Eine Hyperfläche ist genau dann charakteristisch, wenn sie aus lauter charakteristischen Kurven besteht.

2) Ein hyperbolischer Differentialoperator in 2 Variablen hat (nach Satz 1) die kanonische Form $\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2 + \cdots$ und die charakteristischen Kurven $\xi + \eta = C,\ \xi - \eta = C$.

Bemerkung Wir streifen kurz den gleichmäßig parabolischen Fall in zwei Variablen:
$P(x, y, \partial_x, \partial_y)$ sei parabolisch für alle $\vec{x}$ bei $\vec{x}_0$. Dann sind im Beweis von Satz 1 $d = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ bei $\vec{x}_0$. Wieder sei oEdA $a(\vec{x}_0) \neq 0$ und η die Lösung von $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0$ zum Anfangswert $\eta(x_0, y) = y$. (x, η) sind Koordinaten bei $\vec{x}_0$, da $\dfrac{\partial(x, \eta)}{\partial(x, y)} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 1$ in $\vec{x}_0$. Dann ist $\tilde{c} = 0$ und aus $0 = \det \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix} = -\tilde{b}^2$ folgt $\tilde{b} = 0$. Also erhalten wir in diesem Fall als kanonische Form $(\partial_x^2 + \cdots)u = 0$. Nun zum elliptischen Fall!

Satz 2
$P(x, y, \partial_x, \partial_y)$ sei linear, 2. Ordnung, mit reell-analytischen Koeffizienten und **elliptisch** in $\vec{x}_0$. Dann gibt es reell-analytische Koordinaten ξ, η bei $\vec{x}_0$, in denen $P(\vec{x}, \partial)u = 0$ die Form $(\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2 + \cdots)u = 0$ hat.

Beweis $\lambda_1, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ im Beweis von Satz 1 sind analytische Funktionen in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ in $\mathbb{R}^2$. Der Satz von Cauchy-Kowalewski (s. 3.3, S. 12) liefert eine (komplexwertige) Lösung v von $\dfrac{\partial v}{\partial x} - \lambda_1 \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0,\ v(x_0, y) = y$. Wir setzen $\xi := \operatorname{Re} v,\ \eta := \operatorname{Im} v$. Wie früher gilt

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} v \\ \overline{v} \end{smallmatrix} \right)}{\partial(x, y)} = \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{\partial(v, \overline{v})}{\partial(x, y)} = \frac{\mathrm{i}}{2} (\lambda_1 - \overline{\lambda_1}) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \pm \frac{\sqrt{|d|}}{a} \neq 0$$

in $\vec{x}_0$, d.h. ξ, η sind Koordinaten.
$\nabla \xi = \underbrace{(\nabla v, \nabla \overline{v})}_{=:B} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},\ \nabla \eta = B \cdot \begin{pmatrix} -\mathrm{i}/2 \\ \mathrm{i}/2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\tilde a = \nabla\xi^T \cdot A \cdot \nabla\xi = \frac{1}{4}(1,1)B^TAB\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \tilde b = \frac{\mathrm{i}}{4}(1,1)B^TAB\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \tilde c = \frac{1}{4}(1,-1)B^TAB\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};$
$\nabla v^T \cdot A \cdot \nabla v = a\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 = \nabla\overline{v}^T \cdot A \cdot \nabla\overline{v},$
$\nabla v^T \cdot A \cdot \nabla\overline{v} = \nabla\overline{v}^T \cdot A \cdot \nabla v =: \alpha \implies B^TAB = \begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix} \implies \tilde a = \tilde c$ und $\tilde b = 0$. Nach Division durch $\tilde a$ erhält man $(\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2 + \cdots)u = 0$. $\square$

Beispiel Wir betrachten den Operator von Tricomi $y\partial_x^2 + \partial_y^2$.

a) Für $y < 0$ ist er hyperbolisch. Die charakteristische Differentialgleichung ist

$$0 = y(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = (\partial_y u + \sqrt{-y}\,\partial_x u) \cdot (\partial_y u - \sqrt{-y}\,\partial_x u).$$

Die Charakteristiken erfüllen

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm\sqrt{-y}\\ 1\end{pmatrix},\ y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{1}{\pm\sqrt{-y}},\ \int(-y)^{1/2}\,\mathrm{d}y = \pm x + C,\ x \pm \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C.$$

Die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen sind also konstant auf $x \pm \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C$ und wir können $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = x \pm \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$ setzen. Dann muss $\tilde a = \tilde c = 0$ sein und wir erhalten

$$\tilde b = \nabla\xi^T\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\nabla\eta = (1, -\sqrt{-y})\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{-y}\end{pmatrix} = 2y.$$

Daher ist

$$P(\xi,\eta,\partial_\xi,\partial_\eta) = 2\tilde b\partial_\xi\partial_\eta + y(\underbrace{\xi_{xx}}_{0}\partial_\xi + \underbrace{\eta_{xx}}_{0}\partial_\eta) + \underbrace{\xi_{yy}}_{1/(2\sqrt{-y})}\partial_\xi + \underbrace{\eta_{yy}}_{-1/(2\sqrt{-y})}\partial_\eta = 4y\left[\partial_\xi\partial_\eta - \frac{\partial_\xi - \partial_\eta}{6(\xi-\eta)}\right].$$

Um zur kanonischen Form zu gelangen, nimmt man dann $\frac{\xi+\eta}{2} = x$, $\frac{\xi-\eta}{2} = \frac{2}{3}(-y)^{3/2} =: z$ als Koordinaten, etwas, was man eigentlich von vornherein erraten könnte. Das ergibt

$$P(x,z,\partial_x,\partial_z)u = -\left(\frac{3}{2}z\right)^{2/3}\left[u_{xx} - u_{zz} - u_z/(3z)\right].$$

b) Für $y > 0$ ist der Operator elliptisch. Entsprechend dem Beweis von Satz 2 müssen wir $\partial_y v + \mathrm{i}\sqrt{y}\partial_x v = 0$ lösen. Die Lösung ξ aus a) gilt (mit analytischer Fortsetzung) auch hier, d.h. $v = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = x - \frac{2}{3}\mathrm{i}y^{3/2}$ und wir nehmen als Koordinaten $\operatorname{Re} v = x$ und $-\operatorname{Im} v = \frac{2}{3}y^{3/2} =: z \implies P(x, z, \partial_x, \partial_z)u = yu_{xx} + u_{zz}(z_y)^2 + u_z z_{yy} =$

$$= \left(\frac{3}{2}z\right)^{2/3}\left[u_{xx} + u_{zz} + \frac{u_z}{3z}\right].$$

3.3 Der Satz von Cauchy-Kowalewski

Zunächst allgemein zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen: Eine Klasse partieller Differentialgleichungen wird durch einen topologischen Raum D beschrieben. $d \in D$ entspricht den **Daten** der Differentialgleichung: Koeffizienten des Operators, rechte Seite, Anfangswerte, Randwerte. Gesucht ist zu $d \in D$ eine **Lösung** u in einem topologischen Raum U. Wenn D, U so gewählt sind, dass

(a: Existenz) $\forall d \in D : \exists\, u \in U :\ u$ Lösung zu d;

(b: Eindeutigkeit) $\forall d \in D : u_1, u_2 \in U$ Lösungen zu $d \implies u_1 = u_2$.

(c: Stetige Abhängigkeit der Lösung) $L :\ \begin{array}{l} D \longrightarrow U \text{ ist stetig,} \\ d \longmapsto \text{Lösung } u \end{array}$

so heißt das entsprechende Problem in D, U **korrekt gestellt** (engl. "well-posed"). Schließlich bleibt noch die Frage nach

(d: Berechnung) Explizite Beschreibung von L.
Das führt auf spezielle Funktionen, Darstellungsformeln durch Integrale (s. Kap. V, VI) und numerische Algorithmen (Kap. VII).

Bsp. Das (triviale) Problem $\frac{\partial}{\partial t}u = f$ mit Anfangswert $u(0, x) = g(x)$ (mit $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$) ist korrekt gestellt, wenn wir $D = \mathcal{C}^\ell\big([0, \infty[\times\mathbb{R}^n\big) \times \mathcal{C}^\ell(\mathbb{R}^n)$ und $U = \mathcal{C}^\ell\big([0, \infty[\times\mathbb{R}^n\big)$ (mit der Topologie der gleichmäßigen $\mathcal{C}^\ell$–Konvergenz auf kompakten Mengen) setzen. Hier ist

$$L : D \longrightarrow U :\ (f, g) \longmapsto u(t, x) = g(x) + \int_0^t f(\tau, x)\,\mathrm{d}\tau.$$

Allgemeiner könnte man im Anschluss an Bemerkung 3) in S. 4 zeigen: „Das lokale Problem von quasilinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit nicht-charakteristischen Anfangswerten ist korrekt gestellt in $\mathcal{C}^\ell$.“

Der folgende „klassische“ Satz von Cauchy (1789–1857) und Kowalewski (С. В. Ковалевская 1850–1891) besagt, dass (a), (b) für das nicht-charakteristische Anfangswertproblem bei (linearen) Differentialgleichungen mit **analytischen** [2] Daten richtig sind.

Satz
$P(x,\partial) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x)\partial^\alpha$ sei ein linearer Differentialoperator der Ordnung m in $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, A sei eine nicht-charakteristische Hyperfläche durch x_0 und f, φ seien Funktionen bei x_0. Weiters seien alle Daten auf V analytisch mit $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ offen, d.h.

(i) f, φ, c_α auf V analytisch (evtl. komplexwertig)

(ii) $A \cap V$ analytisch, d.h. $\exists h : V \longrightarrow \mathbb{R}$ analytisch mit $A \cap V = h^{-1}(0)$ und $\forall x \in A \cap V$: $\nabla h(x) \neq 0$.

Dann gilt: (a) $\exists x_0 \in W \subset V$ offen: $\exists u : W \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch: $\exists C > 0 : \forall x \in W : P(x,\partial)u(x) = f(x) \wedge \big|(u-\varphi)(x)\big| \leq C\big|h(x)\big|^m$;
(b) u ist bei x_0 eindeutig, d.h. 2 solche u_1, u_2 stimmen auf U überein mit $x_0 \in U \subset W_1 \cap W_2$ offen.

Bemerkungen 1) Der Satz lässt sich auch für Systeme und für nicht-lineare Gleichungen formulieren.
2) Im Folgenden wählen wir (reell-analytische) Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, sodass $x_0 = 0$ und $x_1 = h$, und setzen $x' := (x_2, \ldots, x_n)$. Nach evtl. Verkleinerung haben V und A die Form $V = \big\{x : |x| < \varepsilon\big\}$, $A = \{x \in V : x_1 = 0\}$ und $\big|(u-\varphi)(x)\big| \leq C\big|h(x)\big|^m$ bedeutet, dass u und φ bzgl. x_1 dieselben ersten m Taylorkoeffizienten haben, d.h. $(\partial_1^j u)(0,x') = g^j(x') := (\partial_1^j\varphi)(0,x')$, $j = 0, \ldots, m-1$. Umgekehrt lässt sich zu analytischen Anfangswerten $g^0, \ldots, g^{m-1}$ immer ein φ finden, z.B. $\varphi(x) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{x_1^j}{j!}\, g^j(x')$.

Beweis des Satzes (nach L. Hörmander, LPDO[1963], 5.1)

a) Es sei $v := u - \varphi$. Dann ist für (a) zu zeigen

$$\forall j < m : \partial_1^j v(0,x') = 0 \text{ und } P(x,\partial)v = f - P(x,\partial)\varphi =: \tilde{f}.$$

Es genügt also, den Fall $\varphi \equiv 0$ zu betrachten. Da $A = \{x \in V : x_1 = 0\}$ nicht-charakteristisch ist, ist $c_{(m,0,\ldots,0)} \neq 0$ auf A und, nach evtl. Verkleinerung, auf V. Nach Division durch $-c_{(m,0,\ldots,0)}$ können wir $c_{(m,0,\ldots,0)} \equiv -1$ voraussetzen, d.h. es ist $\partial_1^m u = Q(x,\partial)u - f$ zu lösen mit $(\partial_1^j u)(0,x') = 0$, $j < m$.

[2] Für $V \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch $\iff \forall x \in V : \exists \varepsilon > 0 : \exists a_\alpha \in \mathbb{C} : \forall y \in V$ mit $|x-y| < \varepsilon : f(y) = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha(y-x)^\alpha$

Anstelle von u betrachten wir $u_\delta(x) := u(\delta^2 x_1, \delta x')$ für $\delta > 0$. Für $z \in \mathbb{C}^n$ bei 0 und $Q(z,\partial) = \sum\limits_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha\neq(m,0,\dots,0)}} c_\alpha(z)\partial^\alpha$ folgt dann aus $\partial_1^m u = Q(x,\partial)u - f$ für u_δ die Differentialgleichung

$$\partial_1^m(u_\delta) = \delta^{2m}(\partial_1^m u)_\delta = \delta^{2m}\big(Q(z,\partial)u - f\big)_\delta = \sum_\alpha \underbrace{(c_\alpha)_\delta \delta^{2(m-\alpha_1)-|\alpha'|}}_{\tilde{c}_\alpha}\partial^\alpha(u_\delta) - \underbrace{\delta^{2m} f_\delta}_{\tilde{f}}.$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ und δ genügend klein sind die zu u_δ gehörigen Daten $\tilde{c}_\alpha$ so wie $\tilde{f}$ in $E^n = E \times \cdots \times E$ analytisch, wobei $E := \big\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\big\}$, und erfüllen dort $\sum\limits_\alpha \big|\tilde{c}_\alpha(z)\big| \le \varepsilon$ und $\big|\tilde{f}(z)\big| \le \frac{1}{3}$.
Da mit u_δ auch u gefunden ist, können wir diese zwei Ungleichungen oEdA für Q und f selber voraussetzen. OEdA sei auch $m \ge 1$.

b) Wir konstruieren rekursiv u_k analytisch in E^n. Es sei $u_0 :\equiv 0$ und u_k erfülle $\partial_1^m u_k = Q(z,\partial)u_{k-1} - f$ und $\partial_1^j u_k(0,z') = 0$ für $j < m$. Wegen

$$u_k(z) = \int_0^{z_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} \underbrace{(\partial_1^m u_k)}_{Qu_{k-1}-f}(t_m, z')\,\mathrm{d}t_m \cdots \mathrm{d}t_1$$

ist mit u_{k-1} auch u_k analytisch in E^n. Es sei $v_k := u_k - u_{k-1},\ k \in \mathbb{N}$. In c) zeigen wir, dass

$$(*) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \forall z \in E^n : \big|v_k(z)\big| \le 3^{-k}\prod_{j=1}^n \big(1 - |z_j|\big)^{-mk}.$$

Dann ist $u := \sum\limits_{j=1}^\infty v_j = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^k (u_j - u_{j-1}) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ für $z \in E^n$ mit $\prod\limits_{j=1}^n \big(1-|z_j|\big)^{-m} < 2$ gleichmäßig konvergent und daher analytisch. Weiters gilt $\partial^\alpha u = \lim\limits_{k\to\infty}\partial^\alpha u_k$, denn bei einem gleichmäßigen konvergenten Grenzwert $g = \lim\limits_{k\to\infty} g_k$ von analytischen Funktionen z.B. auf $\mathbb{C}$ ist $g'(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{|\omega-\zeta|=r} g(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-\zeta)^2} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{k\to\infty}\int_{|\omega-\zeta|=r} g_k(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{(\omega-\zeta)^2} = \lim_{k\to\infty} g_k'(\zeta)$. Daher folgt $\partial_1^m u = \lim\limits_{k\to\infty}\partial_1^m u_k = \lim\limits_{k\to\infty} Q(x,\partial)u_{k-1} - f = Q(x,\partial)u - f$.
Schließlich ist auch $(\partial^j u)(0,x') = \lim\limits_{k\to\infty}(\partial^j u_k)(0,x') = 0$ für $j < m$. Weiters ist u bei $x_0 = 0$ eindeutig, da aus der Gleichung $\partial_1^m u = Q(x,\partial)u - f$ alle Koeffizienten der Taylorreihe $u(z) = \sum\limits_\alpha a_\alpha z^\alpha$ rekursiv bestimmt werden können.

c) Wir führen $(*)$ auf 2 Lemmata zurück. Wie oben sei $E = \big\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\big\}$.

Lemma 1 $\quad g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $g(0) = 0,\ a > 1,\ C \geq 0,$

$$\forall \zeta \in E : \left|g'(\zeta)\right| \leq C\big(1 - |\zeta|\big)^{-a}.$$

Dann gilt: $\forall \zeta \in E : \left|g(\zeta)\right| \leq \dfrac{C}{a-1}\big(1 - |\zeta|\big)^{-a}$

Beweis

$$\left|g(\zeta)\right| = \left|\int_0^\zeta g'(w)\,\mathrm{d}w\right| = \left|\int_0^1 g'(t\zeta)\zeta\,\mathrm{d}t\right| \leq |\zeta| \cdot C \cdot \int_0^1 \big(1 - |t\zeta|\big)^{-a}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{C}{a-1}\big(1 - t|\zeta|\big)^{1-a}\Big|_{t=0}^{1} = \frac{C}{a-1}\Big[\big(1 - |\zeta|\big)^{1-a} - 1\Big] \leq$$

$$\leq \frac{C}{a-1}\big(1 - |\zeta|\big)^{1-a} \leq \frac{C}{a-1}\big(1 - |\zeta|\big)^{-a} \qquad \square$$

Lemma 2 $\quad g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $a \geq 0,\ C \geq 0,$

$$\forall \zeta \in E : \left|g(\zeta)\right| \leq C\big(1 - |\zeta|\big)^{-a}.$$

Dann gilt: $\forall \zeta \in E : \ \left|g'(\zeta)\right| \leq C\,\mathrm{e}\,(a+1)\big(1 - |\zeta|\big)^{-a-1}.$

Beweis

Zunächst sei $a > 0$. $g'(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_{|\omega-\zeta|=r} \frac{g(\omega)}{(\omega-\zeta)^2}\,\mathrm{d}\omega$ für $|\zeta| + r < 1 \implies$

$\implies \left|g'(\zeta)\right| \leq \dfrac{1}{2\pi r^2} \cdot 2\pi r \cdot \displaystyle\max_{|\omega-\zeta|=r} \left|g(\omega)\right| \leq \frac{1}{r} \cdot C \cdot \big(1 - |\zeta| - r\big)^{-a} =: h(r),$

$0 < r < 1 - |\zeta|$.

h wird minimal für $0 = h'(r) = C\Big[-\frac{1}{r^2}\big(1 - |\zeta| - r\big)^{-a} + \frac{a}{r}\big(1 - |\zeta| - r\big)^{-a-1}\Big] \iff$
$1 - |\zeta| - r = ar \iff r = \dfrac{1 - |\zeta|}{a+1}$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \left|g'(\zeta)\right| \ &\leq\ h(r) = \frac{a+1}{1-|\zeta|} \cdot C \cdot \big(1 - |\zeta|\big)^{-a} \cdot \underbrace{\big(1 + \tfrac{1}{a}\big)^a}_{\leq \mathrm{e}} \\ &\leq\ C\,\mathrm{e}(a+1)\big(1 - |\zeta|\big)^{-a-1}. \end{aligned}$$

Für $a = 0$ folgt das Ergebnis mit $a \searrow 0$. $\square$

Beweis von $(*)$ in S. 13 mit vollständiger Induktion:

$v_1 = u_1 - u_0 = u_1$ erfüllt $(*)$, da $\partial_1^j u_1(0, z') = 0,\ j < m$,

$\partial_1^m u_1 = -f,\ \left|f(z)\right| < \frac{1}{3} \implies \left|u_1(z)\right| < \frac{1}{3}$ für $z \in E^n$.

$$\begin{aligned} \text{Für } k \in \mathbb{N} \text{ ist } \partial_1^m v_{k+1} &= \partial_1^m (u_{k+1} - u_k) \\ &= Q(z, \partial)(u_k - u_{k-1}) = Q(z, \partial) v_k. \end{aligned}$$

Wenn $(*)$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt, so liefert Lemma 2

$$\forall z \in E^n : \left|Q(z, \partial) v_k(z)\right| \leq 3^{-k} \big[\mathrm{e} m(k+1)\big]^m \varepsilon \prod_{j=1}^n \big(1 - |z_j|\big)^{-m(k+1)}$$

Lemma 1 gibt

$$\forall z \in E^n : \left|v_{k+1}(z)\right| \leq 3^{-k} \underbrace{\left[\frac{\mathrm{e} m(k+1)}{m(k+1) - 1}\right]^m}_{\leq 2\mathrm{e}} \varepsilon \prod_{j=1}^n \big(1 - |z_j|\big)^{-m(k+1)}$$

Daher gilt $(*)$, wenn $\varepsilon \leq \frac{1}{3}(2\mathrm{e})^{-m}$ gewählt wird. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass aus (a), (b) in S. 12 i.A. nicht (c) folgt. Es besagt, dass das Cauchyproblem (s. 3.4.3) für Δ_2 (und allgemeiner für elliptische Differentialgleichungen) nicht korrekt gestellt ist.

Beispiel von Hadamard Mit $n = m = 2,\ t = x_1,\ x = x_2$ existiert nach Cauchy-Kowalewski eine eindeutige Lösung u_a von $(\partial_t^2 + \partial_x^2) u_a = 0,\ u_a(0, x) = 0,\ \partial_t u_a(0, x) = a^{-1} \sin(ax)$.
Wir können hier u_a explizit bestimmen (vgl. 2.2.2):

$$u_a(t, x) = a^{-2} \mathrm{sh}\,(at) \sin(ax)$$

Aber für $a \to \infty$ geht der Anfangswert gegen 0 und u_a divergiert, da $a^{-2}\mathrm{sh}\,(at) \to \infty$ für $a \to \infty,\ t > 0$ fest. Wenn wir statt des obigen $\partial_t u_a(0, x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{a}} \sin(ax)$ nehmen, so gehen die Anfangswerte sogar gleichmäßig mit allen Ableitungen gegen 0 und dennoch divergiert $u_a(t, x)$.

3.4 Partielle Differentialgleichungen: Übersicht

3.4.1 Linear/nicht-linear; konstante/variable Koeffizienten

Wir betrachten einen physikalischen Prozess, der einer Störung f als Input eine Wirkung $u = F(f)$ als Output zuordnet. Sehr oft wird der Prozess durch (ein System von) Differentialgleichungen modelliert, d.h. $Pu = f$, wobei im allgemeinsten Fall

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^M \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} P^1 \\ \vdots \\ P^M \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix} \text{ und}$$

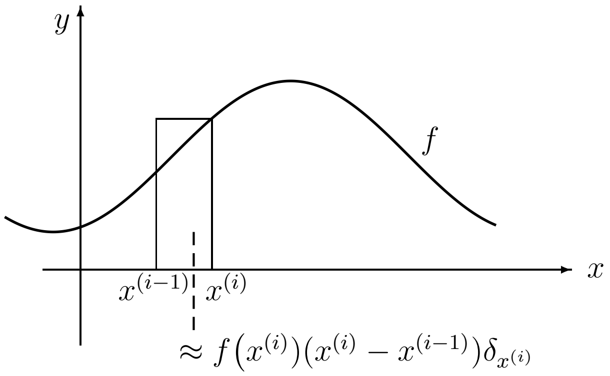
$$(*) \qquad f^i(x) = P^i\big(x, (\partial^\alpha u^j)_{|\alpha|\le m,\ 1\le j\le N}\big), \; 1 \le i \le M,$$

für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $(*)$ allein legt $u = F(f)$ i.A. noch nicht fest und man braucht noch Randbedingungen, s. 3.4.3. Zunächst seien P, u, f skalar; zu Systemen siehe 3.4.4.

Wenn die Störung $f_1 + \lambda f_2$ die Wirkung $F(f_1) + \lambda F(f_2)$ bedingt, so sagt man, das **Superpositionsprinzip** sei gültig. Dann gilt, dass P **linear** ist, d.h.

$$P(x,\partial)u = f \text{ mit } P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)\partial^\alpha.$$

In diesem Fall genügt es, die Greensche Funktion $G_{x_0}(x)$ zu kennen. Diese ergibt sich als Wirkung zu $f = \delta_{x_0}$ (vgl. 2.3.3 und Kap. IV). Denn ein beliebiges f lässt sich als „Summe“ von δ–Quellen zusammensetzen, d.h. $f = \int f(x_0)\delta_{x_0}\,\mathrm{d}x_0$ (denn für $\varphi \in \mathcal{D}$ ist $\langle\varphi, f\rangle = \int \varphi(x_0)f(x_0)\,\mathrm{d}x_0 = \int f(x_0)\langle\varphi,\delta_{x_0}\rangle\,\mathrm{d}x_0 = \Big\langle \varphi, \int f(x_0)\delta_{x_0}\,\mathrm{d}x_0\Big\rangle$, vgl. Kap. IV) und das Superpositionsprinzip liefert $F(f)(x) = \int f(x_0)G_{x_0}(x)\,\mathrm{d}x_0$.

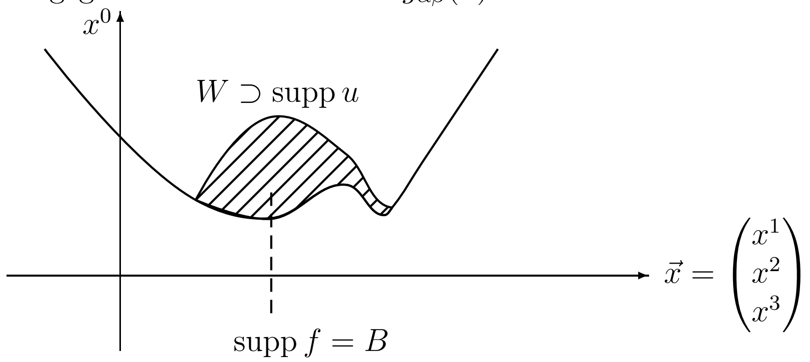


Falls das Medium homogen, d.h. in seinen Eigenschaften verschiebungsinvariant ist, gilt $F\big(f(x-x_0)\big) = F(f)(x-x_0)$, und $P(x,\partial)$ muss von x unabhängig sein, d.h. $P(\partial)u = f$, wobei $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha\partial^\alpha$ ein **Operator mit konstanten Koeffizienten** ist. Dann ist auch $G_{x_0}(x) = F(\delta_{x_0})(x) = F\big(\delta(x-x_0)\big) = F(\delta)(x-x_0) = E(x-x_0)$, wobei $E := G_0$ die Differentialgleichung $P(\partial)E = \delta$ erfüllt, d.h. eine Fundamentallösung von $P(\partial)$ ist (vgl. 4.2). Bei linearen partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten genügt es also E zu kennen, und es gilt $F(f)(x) = \int f(x_0)E(x-x_0)\,\mathrm{d}x_0 = E * f$ (vgl. 4.3).

3.4.2 Hyperbolisch/parabolisch/elliptisch

Def.:
M topologischer Raum, $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$. $\operatorname{supp} f :=$ Abschluss von $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$ heißt **Träger** (engl. support) von f.

a) Bei dynamischen Vorgängen in der Natur gilt das **Kausalitätsprinzip**, d.h. eine Störung f, die nur in einem Bereich $B \subset M =$ Raum-Zeit lokalisiert ist, also $\operatorname{supp} f = B$, bewirkt $u = F(f)$ mit Träger in der Vereinigung W der von $x_0 \in B$ ausgehenden Vorwärtslichtkegel, s. Bild. (Für eine nicht-konstante Lorentzmetrik sehen diese Lichtkegel im Bild gekrümmt aus.) Im linearen Fall muss G_{x_0} Träger im von x_0 ausgehenden Lichtkegel K_{x_0} haben. Der entsprechende Differentialoperator $P(x, \partial)$ wird dann **hyperbolisch** genannt bzgl. der gegebenen Lorentzmetrik $g_{\alpha\beta}(x)\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta$ auf M.



Ein linearer Operator $P(\partial)$ mit konstanten Koeffizienten heißt **hyperbolisch in Richtung** N $(N \in \mathbb{R}^n \setminus 0) \iff P(\partial)$ ist hyperbolisch bzgl. konstanter Lorentzmetrik mit $K_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq CN \cdot x\}$ für ein $C > 0 \iff \exists$ Fundamentallösung E von $P(\partial)$ mit

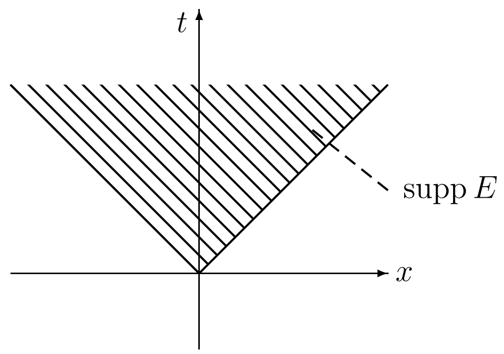
$$\operatorname{supp} E \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq CN \cdot x\} \text{ für ein } C > 0.$$

Bsp. $n = 2,\ t \hat{=} x^1,\ x \hat{=} x^2,\ P(\partial) = \partial_t^2 - \partial_x^2,\ N = \binom{1}{0}$

$$E = \frac{1}{2} Y\big(t - |x|\big) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : \ t \geq |x| \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(vgl. 4.3; Bsp. 3)}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{supp} E = \left\{\binom{t}{x} \in \mathbb{R}^2 : t \geq |x|\right\}$$

$$= \left\{\binom{t}{x} \in \mathbb{R}^2 : \left|\binom{t}{x}\right| \leq \sqrt{2}\, N \cdot \binom{t}{x}\right\}.$$



Allgemeiner ist $\partial_t^2 - \Delta_n$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ hyperbolisch in $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$–Richtung und die obige Definition von hyperbolisch umfasst die von 3.2, S. 7. Mehr dazu in Kapitel V.

b) Wenn das Kausalitätsprinzip nur bzgl. der Newtonschen Raum-Zeit gilt, d.h. $M = \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ und

$$\operatorname{supp} f \subset \big\{(t,x) : t \geq t_0\big\} =: M_{t_0} \implies \operatorname{supp} F(f) \subset M_{t_0}$$

so nennt man $P(t,x,\partial)$ **Evolutionsoperator**. In Physik und Technik werden solche Operatoren oft **parabolisch** genannt, falls sie nicht hyperbolisch sind. (Bei L. Hörmander hat „parabolisch" eine eingeschränktere Bedeutung.) Für parabolische Operatoren in diesem Sinn erfolgt die Wirkungsausbreitung mit unendlicher Geschwindigkeit. Insofern modellieren sie die Natur nur unvollkommen.
Ein Evolutionsoperator mit konstanten Koeffizienten $P(\partial)$ wird dadurch charakterisiert, dass eine Fundamentallösung E mit $\operatorname{supp} E \subset \big\{(t,x) : t \geq 0\big\}$ existiert.

Bsp. Der Wärmeleitungsoperator $\partial_t - \Delta_n$ ist ein Evolutionsoperator, da $E = \dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{n/2}}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/(4t)}$ eine Fundamentallösung ist (s. 4.4, Bsp. 6). Ebenso ist der Schrödingeroperator $\partial_t - \mathrm{i}\,\Delta_n$ ein Evolutionsoperator.

c) Statische Probleme in Physik und Technik werden i.A. durch elliptische Operatoren beschrieben. In Verallgemeinerung von S. 7 definiert man

Def.:
Der lineare Differentialoperator $P(x,\partial)$ in $\mathbb{R}^n$ heißt in x_0 **elliptisch**
$\iff \forall 0 \neq N \in \mathbb{R}^n: \;\; P_{\mathrm{pr}}(x_0, N) \neq 0.$

Für einen elliptischen Differentialoperator ist also jede Hyperfläche nicht-charakteristisch.

3.4.3 Rand-/Anfangswertprobleme

a) $P(t,x,\partial)$ sei ein linearer Differentialoperator im $\mathbb{R}^{n+1}$ vom Grad m in ∂_t, $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x), f(t,x)$ gegebene Funktionen. Man bezeichnet als **Cauchy-Problem** oder reines **Anfangswertproblem** die Frage nach $u(t,x)$ mit

(i) $P(t,x,\partial)u(t,x) = f(t,x),\;\; t > 0,\;\; x \in \mathbb{R}^n;$

(ii) $\dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}(0,x) = u_j(x),\;\; x \in \mathbb{R}^n,\;\; j = 0,1,\dots,m-1.$

Bemerkungen 1) Wenn (i),(ii) im Sinn der klassischen Analysis gelten, nennt man u **klassische Lösung**. I.A. werden aber (i),(ii) nur distributionell gelten (s. Kapitel IV) und dann nennt man u **schwache Lösung**.
2) Bei strikt hyperbolischen Operatoren (in t–Richtung) mit $\mathcal{C}^\infty$–Koeffizienten ist das Cauchy-Problem korrekt gestellt, s. L. Hörmander LPDO[1963], Kap. IX. Bei parabolischen Operatoren benötigt man zusätzliche Bedingungen betreffend das Verhalten von u für $t \to \infty$.

b) $P(x, \partial)$ sei ein linearer Differentialoperator im $\mathbb{R}^n$ der Ordnung $2k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Gamma := \partial\Omega$, $p_1(x, \partial), \ldots, p_k(x, \partial)$ seien lineare Differentialoperatoren, f bzw. $b_1, \ldots, b_k$ seien Funktionen auf Ω bzw. Γ. Man bezeichnet als **Randwertproblem** die Frage nach $u(x)$ mit

(i) $P(x, \partial)u(x) = f(x),\ x \in \Omega;$

(ii) $p_j(x, \partial)u(x) = b_j(x),\ x \in \Gamma,\ j = 1, \ldots, k.$

Bemerkungen 1) „Elliptische" Randwertprobleme sind korrekt gestellt, vgl. L. Hörmander LPDO, Kap. X. Der wesentliche Unterschied zu a) ist, dass i.A. Ω beschränkt ist und die Anzahl der Randbedingungen **die Hälfte** der Ordnung von P ist. Für unbeschränktes Ω kommen Bedingungen im Unendlichen dazu („Streuungsprobleme", „Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung").
2) Speziell bei linearen elliptischen Gleichungen 2. Ordnung $\sum\limits_{|\alpha| \le 2} c_\alpha(x)\partial^\alpha u = f$ nennt man die Suche nach u mit den jeweiligen Randbedingungen

α) $u\big|_\Gamma = g :$ **Dirichletproblem** $\vee$ **1. Randwertproblem**;

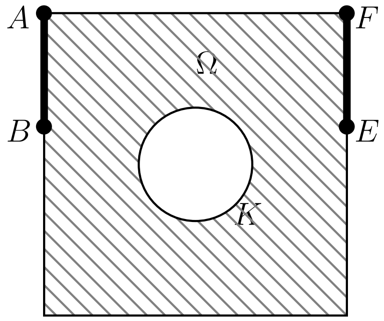
β) $\partial_n u\big|_\Gamma = g :$ **Neumannproblem** $\vee$ **2. Randwertproblem**;

γ) $\big(\partial_n u + b(x)u\big)\Big|_\Gamma = g,\ b(x) \neq 0 :$ **Robin's Problem** $\vee$ **3. Randwertproblem**;

δ) $\big(b_1(x)\partial_n u + b_2(x)u\big)\Big|_\Gamma = b_3(x) :$ **gemischtes Randwertproblem** (falls es nicht ein Spezialfall von $\alpha) - \gamma)$ ist)

Dabei ist $\partial_n u(x) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} N_x^T \cdot \nabla u(x - \varepsilon N_x)$, wobei N_x den von Ω nach außen gerichteten Einheitsnormalvektor in x an $\Gamma = \partial\Omega$ bezeichnet. Wenn Γ durch $h(x) = 0$ mit $\nabla h \neq 0$ gegeben ist, so ist also $N = \pm\nabla h/|\nabla h|$ und $\partial_n u = N^T \cdot \nabla u = \pm \sum\limits_{j=1}^n \dfrac{\partial_j h(x)}{\big|\nabla h(x)\big|} \cdot \partial_j u.$

Bsp. (H. Schwarz, FE, p. 13)
Es ist die stationäre Temperaturverteilung u im gezeichneten Gebiet Ω gesucht, wenn auf AB, EF die Temperatur auf 0 gehalten wird, $AF,\ BE$ isoliert sind, auf dem Kreis K ein Wärmeverlust durch Konvektion (=strömende Flüssigkeit) erfolgt, und in Ω die Wärmequelle $f(x)$ wirkt.



Dann gilt

$$\Delta_2 u = -f;\ u = 0 \text{ auf } AB, EF;\ \partial_n u = 0 \text{ auf } AF,\ BE;\ \partial_n u + b(x)u = 0 \text{ auf } K.$$

Das ist ein gemischtes Randwertproblem.

c) Die Kombination aus a) und b) nennt man **Randanfangswertproblem** oder **gemischtes Problem**. Hier sind für eine hyperbolische oder parabolische Differentialgleichung $P(t,x,\partial)u = f$ in $\mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sowohl Anfangsbedingungen $\dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}(0,x) = u_j(x)$, $x \in \Omega,\ j = 0,1,\ldots,m-1$ als auch Randbedingungen $p_j(x,\partial)u(t,x) = b_j(x),\ t > 0$, $x \in \partial\Omega,\ j = 1,\ldots,k$ gegeben.
Die Lösung wird oft auf ein Randwertproblem für elliptische Differentialgleichungen zurückgeführt: Man setzt dazu $u(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}v(x)$ und sucht nach **Eigenfrequenzen**, d.h. solchen ω, für die es nicht-triviale Lösungen gibt, wenn $f = 0$ und $b_j = 0$.

3.4.4 Systeme

Nach Durchnummerierung aller Tensorindices lässt sich ein lineares System von linearen Differentialgleichungen wieder in der Form $P(x,\partial)u = f$ schreiben, wobei hier

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^M \end{pmatrix} \text{ und } P(x,\partial) = \begin{pmatrix} P^1_1(x,\partial) & \cdots & P^1_N(x,\partial) \\ \vdots & & \vdots \\ P^M_1(x,\partial) & \cdots & P^M_N(x,\partial) \end{pmatrix},$$

M = Anzahl der Gleichungen, N = Anzahl der abhängigen Variablen.

Bsp. $u = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_k} u_{i_1\ldots i_k}\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \in \Omega^k(\mathbb{R}^n),\ 0 \le k \le n$ hat $N = \binom{n}{k}$ Komponenten.
Die äußere Ableitung $f = \mathrm{d}u = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_k} \sum\limits_j \dfrac{\partial u_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ hat $M = \binom{n}{k+1}$ Komponenten.

Z.B. entspricht $k=0$ dem Gradienten ($\mathrm{d}u = f = f_i\,\mathrm{d}x^i \Longleftrightarrow \nabla u = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$), $k=n-1$ der Divergenz und $k=1$ (für $n=3$) der Rotation. Das System ist lokal lösbar $\Longleftrightarrow \mathrm{d}f = 0$ (Poincarésches Lemma).

Bemerkungen 1) Oft formt man Gleichungen höherer Ordnung in Systeme von Gleichungen erster Ordnung um. Es sei z.B.

$$\big[\partial_t^m + Q(t,x,\partial_x)\partial_t^{m-1} + \cdots + Q_m(t,x,\partial_x)\big]u = f.$$

Man setzt $u^j := \partial_t^j u,\ j = 0,\ldots,m-1$ und erhält das folgende Gleichungssystem 1. Ordnung in ∂_t :

$$\begin{aligned} (\partial_t + Q_1)u^{m-1} + Q_2 u^{m-2} + \cdots + Q_m u^0 &= f \\ \partial_t u^{m-2} - u^{m-1} &= 0 \\ &\vdots \\ \partial_t u^0 - u^1 &= 0 \end{aligned}$$

2) Umgekehrt wird oft aus einem System von Differentialgleichungen eine Einzelgleichung höherer Ordnung gefolgert. („Decoupling“, „Entkoppelung“). Wenn z.B. $P(\partial)$ ein $N \times N$–System von Operatoren mit konstanten Koeffizienten ist und $P^{\mathrm{ad}}(\partial)$ die adjungierte Matrix zu $P(\partial)$ bezeichnet, d.h.

$P(\xi) \cdot P^{\mathrm{ad}}(\xi) = I_N \det P(\xi)$, so gilt $P(\partial)u = f \quad \Big| \cdot P^{\mathrm{ad}}(\partial)$ (von links) $\Longrightarrow$

$I_N \det P(\partial)u = P^{\mathrm{ad}}(\partial)f$, d.h. $\forall j = 1,\ldots,N : \det P(\partial)u^j = P^{\mathrm{ad}}(\partial)^j_k f^k =: g^j$.

Übungen zu 3.1

Übung 1: Zeige: a) Die Charakteristiken des Vektorfeldes $X = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$ im $\mathbb{R}^2$ erfüllen die Differentialgleichung $y' = \dfrac{b(x,y)}{a(x,y)}$. Wie hängt das mit Bem. 3, S. 3 zusammen?

b) Wenn die Lösungen dieser Differentialgleichung implizit durch $\xi(x,y) = C$ gegeben sind, so ist $u = h\big(\xi(x,y)\big)$, h beliebig ($\mathcal{C}^1$), die allgemeine Lösung von $Xu = 0$.

Übung 2: a) Bestimme und skizziere die Charakteristiken von $X = (\cos y)\partial_x + (\cos x)\partial_y$.

b) In welchen Punkten ist die x–Achse charakteristisch bzgl. X aus a)?
Was ist die Lösung von $Xu = 0$, $u\big|_A = u_0$, wenn $A = \left\{ \binom{x}{0} : |x| < \frac{\pi}{2} \right\}$?
Gibt es eine Lösung von $Xu = 0$ mit $u(x,0) = x$ für $0 < x < \pi$?

Übung 3: Die Charakteristiken des Vektorfeldes $X = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$ im $\mathbb{R}^2$ seien durch $\xi(x,y) = C$ gegeben und $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$.
Welche Form hat X in den Koordinaten ξ, η?
Wie löst man darin die Differentialgleichung $Xu = g(x,y,u)$?

Übung 4: Bestimme die allgemeine Lösung von $(\cos y)\partial_x u + (\cos x)\partial_y u = \cos x \cos y$ durch Koordinatenwechsel (vgl. Übung 3).

Übung 5: Bestimme die allgemeine Lösung von $x\partial_x u + y\partial_y u = xy + u$.
Was ergibt sich speziell zum Anfangswert $u(1,y) = u_0(y)$ für $x > 0$?

Übung 6: Die Charakteristiken des Vektorfeldes X im $\mathbb{R}^n$ seien durch $n-1$ Gleichungen $\xi_1(x) = C_1, \ldots, \xi_{n-1}(x) = C_{n-1}$ gegeben. Überlege, dass die allgemeine Lösung von $Xu = 0$ dann die Form $u = h\big(\xi_1(x), \ldots, \xi_{n-1}(x)\big)$ hat, h beliebig ($\mathcal{C}^1$).

Übung 7: Betrachte die quasilineare Differentialgleichung $xu^4\partial_x u + yu^4\partial_y u = x^2y^2$.

a) Führe sie auf eine lineare homogene Differentialgleichung $\tilde{X}U = 0$ im $\mathbb{R}^3$ zurück (siehe Bem. 3, S. 3).

b) Bestimme die Charakteristiken davon (durch Parametrisierung nach x)!

c) Löse $\tilde{X}U = 0$ (siehe Übung 6).

d) Löse die ursprüngliche quasilineare Differentialgleichung.

e) Für welche Anfangswerte $u_0 = u\big|_A$ ist (A, u_0) nicht-charakteristisch, wenn $A = \left\{ \binom{1}{y} :\ y \in \mathbb{R} \right\}$.

f) Löse die Differentialgleichung zum Anfangswert $u(1,y) = u_0(y) \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Übung 8: a) Charakterisiere durch eine Differentialgleichung die $\mathcal{C}^1$–Hyperflächen $A \subset \mathbb{R}^n$, deren Tangentialebenen an einen beliebigen Punkt $x \in A$ die x_n–Achse in einem Punkt X

schneiden, der von 0 und x gleich weit entfernt ist. Die Hyperfläche sei durch $u(x) = 0$ gegeben.

b) Bestimme die Charakteristiken dieser Differentialgleichung (durch Parametrisierung nach x_1).

c) Löse die Differentialgleichung.

Übungen zu 3.2

Übung 1: Bestimme den Typ der Differentialgleichung

$$u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - (\cos x)u_y = 0,$$

bringe sie auf Normalform, und löse sie.

Übung 2: Betrachte die Differentialgleichung $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0$.
a) Bestimme und skizziere die charakteristischen Kurven in $y < 0$.
b) Bringe die Differentialgleichung in den 2 Gebieten $y < 0$ bzw. $y > 0$ auf Normalform.

Übung 3: Wenn die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung im $\mathbb{R}^n$

$$\big(c^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \cdots\big)u = 0,\ c^{ij} = c^{ji},$$

durch Koordinatentransformation auf Standardform

$$(\partial_1^2 + \cdots + \partial_a^2 - \partial_{a+1}^2 - \cdots - \partial_{a+b}^2 + \cdots)u = 0$$

gebracht werden kann, so gilt $\tilde{c}^{kl} = 0$ für $k \neq l$ und $\dfrac{\tilde{c}^{kk}}{\tilde{c}^{ll}} \in \{0, 1, -1\}$ für $k = 1, \ldots, n$, wobei $\tilde{c}^{kl} = c^{ij}\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^l}{\partial x^j}$ (siehe Seite 6).
a) Wieviele Differentialgleichungen sind das in den n Unbekannten $y^1, \ldots, y^n$?
b) Für welche n ist die Anzahl der Differentialgleichungen $\leq n$?

Übung 4: Wir betrachten die Differentialgleichung $u_{\xi\eta} - \dfrac{\alpha}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) = 0$ mit $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ (vgl. Seite 10).
a) Zeige, dass $u^{(1)} = \big[(\xi - t)(t - \eta)\big]^{-\alpha}$ für $(\xi - t)(t - \eta) > 0$ Lösungen sind ($t \in \mathbb{R}$).
b) Zeige, wenn u eine Lösung ist und $v := (\xi - \eta)^{2\alpha - 1}u$, so gilt $v_{\xi\eta} - \dfrac{1 - \alpha}{\xi - \eta}(v_\xi - v_\eta) = 0$ und umgekehrt.
c) Folgere aus a),b), dass auch $u^{(2)} = (\xi - \eta)^{1-2\alpha}\big[(\xi - t)(t - \eta)\big]^{\alpha - 1}$ für $(\xi - t)(t - \eta) > 0$ Lösungen sind ($t \in \mathbb{R}$).
d) Zeige, dass für $f, g \in \mathcal{C}^2$ auch

$$u(\xi, \eta) = \int_\eta^\xi \big[f(t)u^{(1)} + g(t)u^{(2)}\big]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \Big\{(\xi - \eta)^{1-2\alpha} f\big(\eta + (\xi - \eta)s\big)s^{-\alpha}(1 - s)^{-\alpha} + g\big(\eta + (\xi - \eta)s\big)s^{\alpha - 1}(1 - s)^{\alpha - 1}\Big\}\,\mathrm{d}x$$

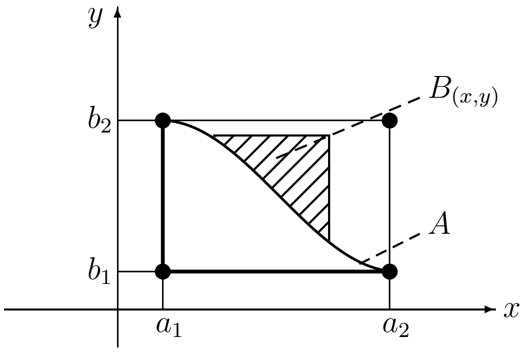
für $\xi > \eta$ Lösungen sind.

Übung 5: Wir betrachten die hyperbolische lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in 2 Variablen in der Normalform $(\partial_{xy} - L)u = f$ mit $L = \alpha(x,y)\partial_x + \beta(x,y)\partial_y + \gamma(x,y)$ für α, β, γ stetig in $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ und mit den Anfangswerten $u\big|_A = \partial_x u\big|_A = 0$ auf einer nicht-charakteristischen Kurve von (a_1, b_2) nach (a_2, b_1).

a) Zeige, dass auch $\partial_y u\big|_A = 0$.

b) Formuliere die Differentialgleichung als Integralgleichung

$$u(x,y) = \iint\limits_{B_{(x,y)}} (f + Lu)(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$



c) Schließe aus b) auf die Eindeutigkeit von u!

Hinweis: Für $f = 0$ und $|Lu| \le C$ folgt $|Lu| \le \frac{C}{2}$ in einer Umgebung von A.

d) Verwende das Verfahren der sukzessiven Approximation, d.h. $u_0 := 0$,

$$u_k(x,y) := \int\limits_{B(x,y)} (f + Lu_{k-1})(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta, \quad u = \lim_{k\to\infty} u_k,$$ um die Existenz von u zu zeigen.

Hinweis: u_k konvergiert in einer Umgebung von A.

Übungen zu 3.3

Übung 1: Bestimme mit dem Ansatz $u(t,x) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$ (vgl. Kap. II, Übung 58) zur Wellengleichung $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = 0$ eine Lösung u mit $u(0,x) = g_0(x),\ \partial_t u(0,x) = g_1(x)$. Ist dieses Anfangswertproblem korrekt gestellt, z.B. bzgl. $g_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ g_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$? (Zum Beweis der Eindeutigkeit verwende die Koordinaten $\xi = x-ct,\ \eta = x+ct$.)

Übung 2: Unter welcher Bedingung an g_0, g_1 hat die Wellengleichung $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = 0$ Lösungen zu den Anfangswerten $u(s,cs) = g_0(s),\ \partial_t u(s,cs) = g_1(s)$? Wieviele gegebenenfalls? Warum widerspricht das Ergebnis dem Satz von Cauchy-Kowalewski nicht?

Übung 3: (S. Kowalewskaya) Betrachte das Anfangswertproblem

$$(\partial_t - \partial_x^2)u = 0,\ u(0,x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1.$$

a) Zeige, dass der Potenzreihenansatz $u(t,x) = \sum_{j,k} a_{jk} t^j x^k$ zur Gleichung

$a_{jk} = \dfrac{(k+2)(k+1)}{j} a_{j-1,k+2}$ führt.

b) Folgere $a_{jk} = \dfrac{(k+2j)!}{j!k!}$ und dass die Reihe für $u(t,x)$ für jedes $t \neq 0$ divergiert.

c) Schließe daraus, dass die Aussage im Satz von Cauchy-Kowalewski bei **charakteristischen** Hyperflächen nicht gelten kann.

Übung 4: Es sei $f(t,x) = Y(t)t^{-n/2}\exp\big(-|x|^2/(4t)\big)$ für $0 \neq (t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Zeige, dass f in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ $\mathcal{C}^\infty$ ist.

b) Überprüfe, dass $(\partial_t - \Delta_n)f = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$.

(Hinweis: Mit $r := |x|$ ist $\Delta_n g(r) = \partial_r^2 + \dfrac{n-1}{r}\partial_r,\ r > 0$.)

c) f ist also eine Lösung von $(\partial_t - \Delta)f = 0$ in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ mit Anfangswert $f(0,x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.
Warum widerspricht das dem Satz von Cauchy-Kowalewski nicht?

Übungen zu 3.4

Übung 1: Wir betrachten einen linearen hyperbolischen Differentialoperator 2. Ordnung in 2 Variablen $P(x,\partial) = g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \cdots$, sowie die zugehörige Lorentz-Metrik $g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ mit $(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}$. Der „Wellenoperator“ zu g ist durch $\Box = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$ gegeben.

a) Überlege, dass die charakteristischen Kurven A zu $P(x,\partial)$ (d.h. $A = u^{-1}(0)$ mit $g^{ij}\partial_i u \partial_j u = 0$, vgl. Seite 8) mit den 0–Geodäten = Lichtkegeln übereinstimmen.

b) Wie sind die Lichtkegel im Fall des Tricomi-Operators $y\partial_x^2 + \partial_y^2$, $y < 0$, gegeben? Skizze!

c) Überlege mittels Übung 5 zu 3.2, dass $P(x,\partial)$ (und speziell $\Box$) hyperbolisch zu g im Sinn von Seite 17 ist.

d) Bestimme den Wellenoperator zur Tricomi-Metrik $y^{-1}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y,\ y < 0$.

e) Zeige, dass in der Normalform $g = \alpha(\xi,\eta)[\mathrm{d}\xi \otimes \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\eta \otimes \mathrm{d}\xi]$ gilt $\Box = 2\alpha(\xi,\eta)^{-1}\partial_\xi\partial_\eta$.

Übung 2: Wenn $u(t,x) \in \mathbb{R}^3$, $T(t,x) \in \mathbb{R}$ die Verschiebung bzw. Temperatur in einem homogenen, isotropen, elastischen Medium bezeichnen, so gilt

$$\varrho\partial_t^2 u - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,u) + \beta\mathrm{grad}\,T = F,\ \partial_t u - K\Delta T + \eta\partial_t \mathrm{div}\,u = Q.$$

a) Schreibe dieses Gleichungssystem mittels einer 4×4–Matrix $P(\partial)$ von Differentialoperatoren.

b) Bestimme den Determinantenoperator $\det P(\partial)$. (Betrachte zuerst $P(t,x)$ und verwende, dass $\det P(t,x)$ rotationssymmetrisch ist.) Was ergibt sich für $\beta\eta = 0$?

Übung 3: Für ein $N \times N$–System $P(\partial)$ mit konstanten Koeffizienten heißt $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)^{N\times N}$ (Rechts-)**Fundamentalmatrix** $\iff P(\partial)E = \delta I_n$.

a) Zeige, dass $P^{\mathrm{ad}}(\partial)F$ eine Fundamentalmatrix von $P(\partial)$ ist, wenn $\big(\det P(\partial)\big)F = \delta$.

b) Es sei $P(\partial) = \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/ - mI_4$ der Dirac-Operator. Zeige, dass $\det P(\partial) = (\Box_4 + m^2)^2$ und $P^{\mathrm{ad}}(\partial) = (\Box_4 + m^2)(-\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/ - mI_4)$.

c) Bestimme die (retardierte) Fundamentalmatrix (= „freier relativistischer Propagator”) von $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/ - mI_4$ durch die Fundamentallösung

$$\frac{1}{4\pi}\delta\big(x^0 - |\vec{x}|\big) - \frac{mY\big(x^0 - |\vec{x}|\big)}{\sqrt{(x^0)^2 - |\vec{x}|^2}} J_1\big(m\sqrt{(x^0)^2 - |\vec{x}|^2}\big)$$

des Klein-Gordon-Operators $\Box_4 + m^2$.